



UNIREMINGTON
CORPORACIÓN UNIVERSITARIA REMINGTON
RES. 2661 MEN JUNIO 21 DE 1996



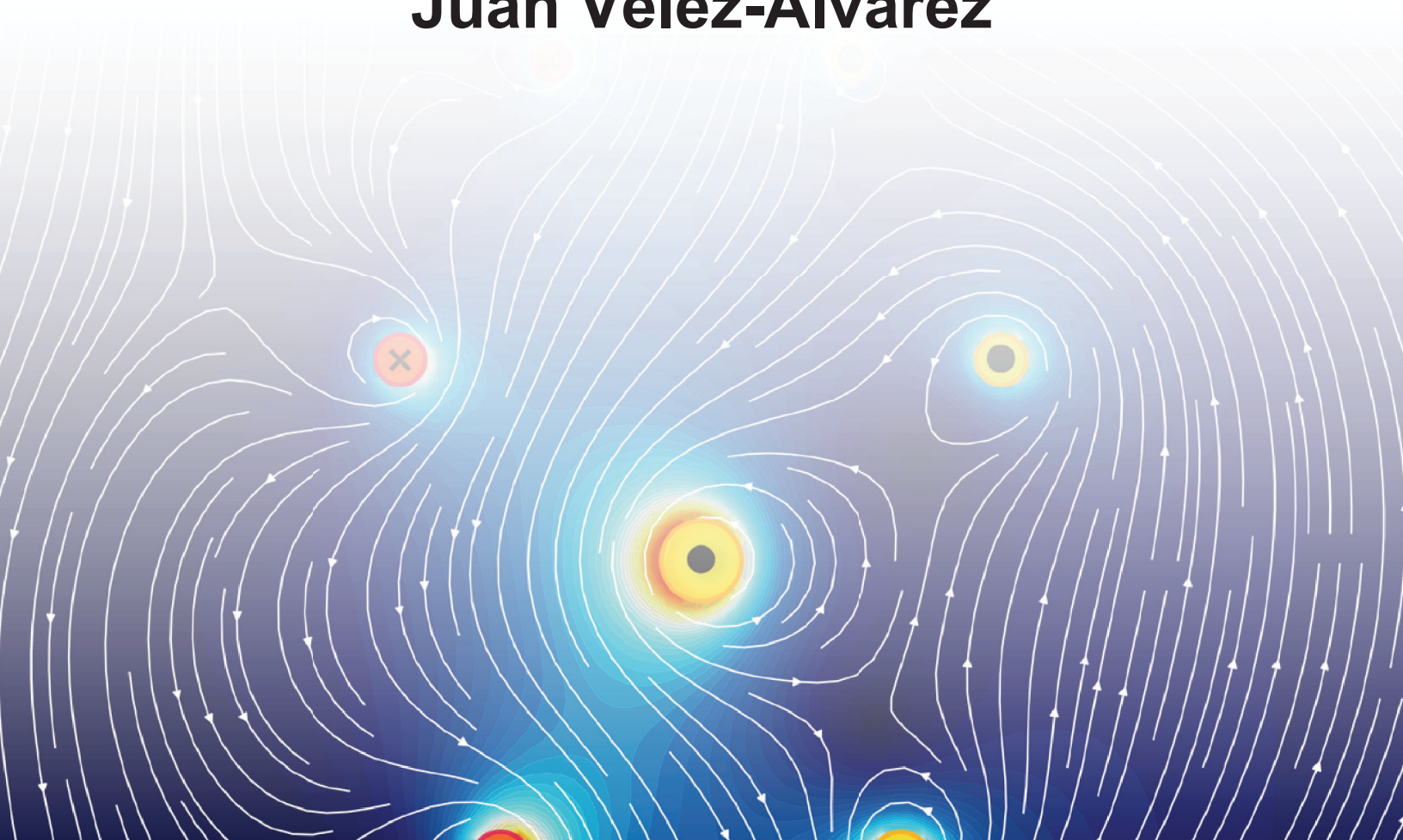
FONDO EDITORIAL
REMINGTON

Electricidad, magnetismo y ondas con aplicaciones en Python

Juan Vélez-Álvarez

Electricidad, magnetismo y ondas con aplicaciones en Python

Juan Vélez-Álvarez



Electricidad, magnetismo y ondas con Aplicaciones en Python / Juan Vélez-Álvarez. - 1ª ed. - Medellín: Corporación Universitaria Remington. 2025

ISBN: 978-628-96812-5-3

1. Teoría de campos. 2. Análisis vectorial. 3. Ondas. 4. Magnetismo. 5. Campos magnéticos. 6. Ondas electromagnéticas. 7. Óptica. 8. Óptica geométrica. 9. Electricidad. I Vélez-Álvarez, Juan. II. Tít.

CDD: 530.14 / V436

© Corporación Universitaria Remington

Primera edición, septiembre de 2025

ISBN: 978-628-96812-5-3

<https://doi.org/10.22209/9786289681253>

Autor: Juan Vélez Álvarez

Directora editorial: Adriana Patricia Bustamante Fernández

Coordinador de procesos editoriales: Óscar Caicedo Alarcón

Diseñador editorial: Alfonso Tobón Botero

Correctora de textos: Isadora González Rojas

Fondo Editorial Remington (FER)

fondo.editorial@uniremington.edu.co

Calle 51 # 51-27, Edificio Uniremington

PBX: (604) 3221000, extensión 3505

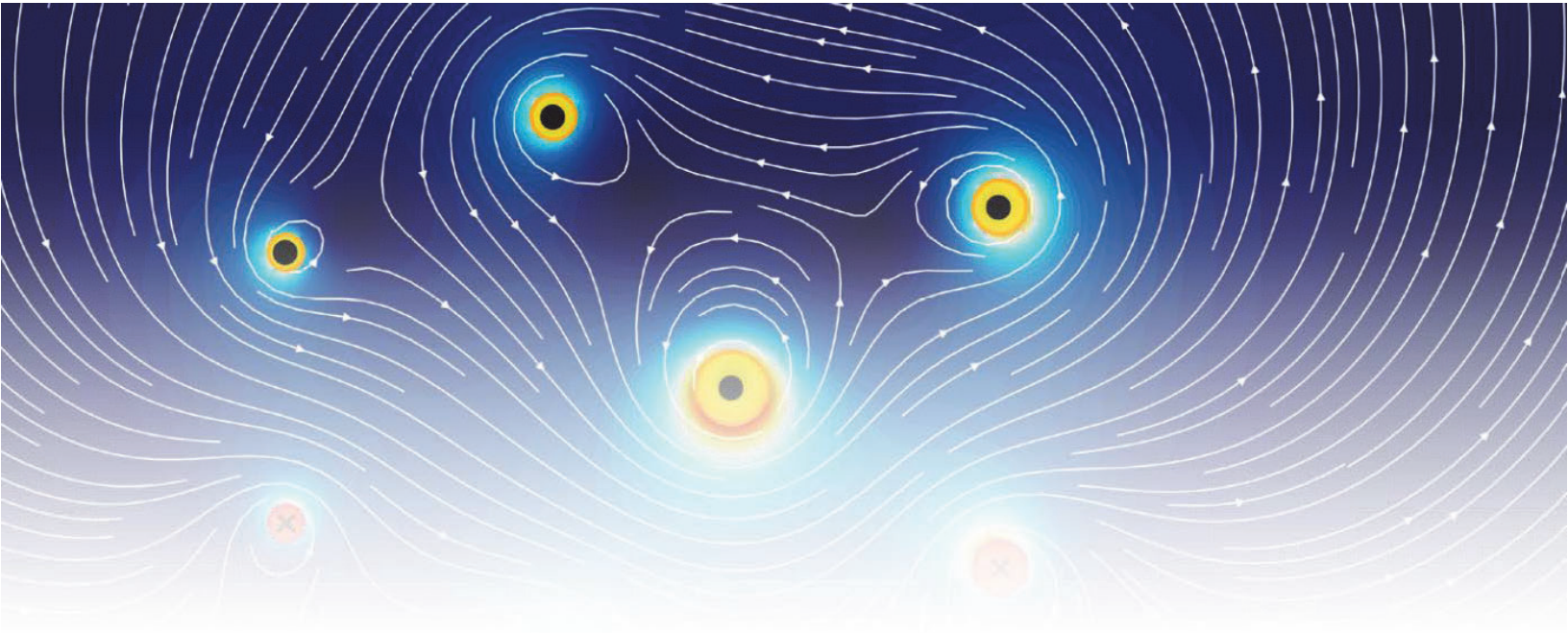
Medellín, Colombia

Nota legal

Las opiniones expresadas en el presente texto no representan la posición oficial o institucional de la Corporación Universitaria Remington. Las citas realizadas y la originalidad de la obra es responsabilidad del autor; en consecuencia, Uniremington no será responsable ante terceros por el contenido técnico o ideológico expresado en el texto, ni asume responsabilidad alguna por las infracciones a las normas de propiedad intelectual



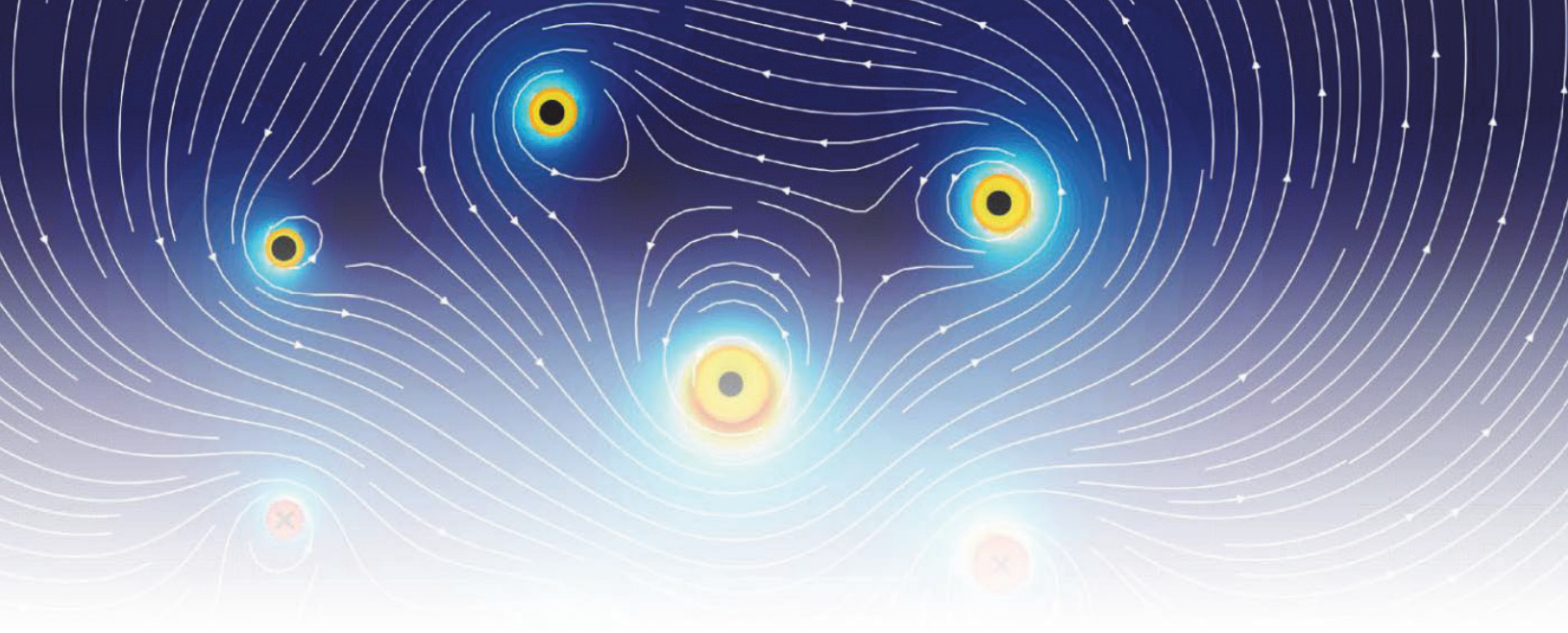
Esta obra está licenciada bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.



Índice general

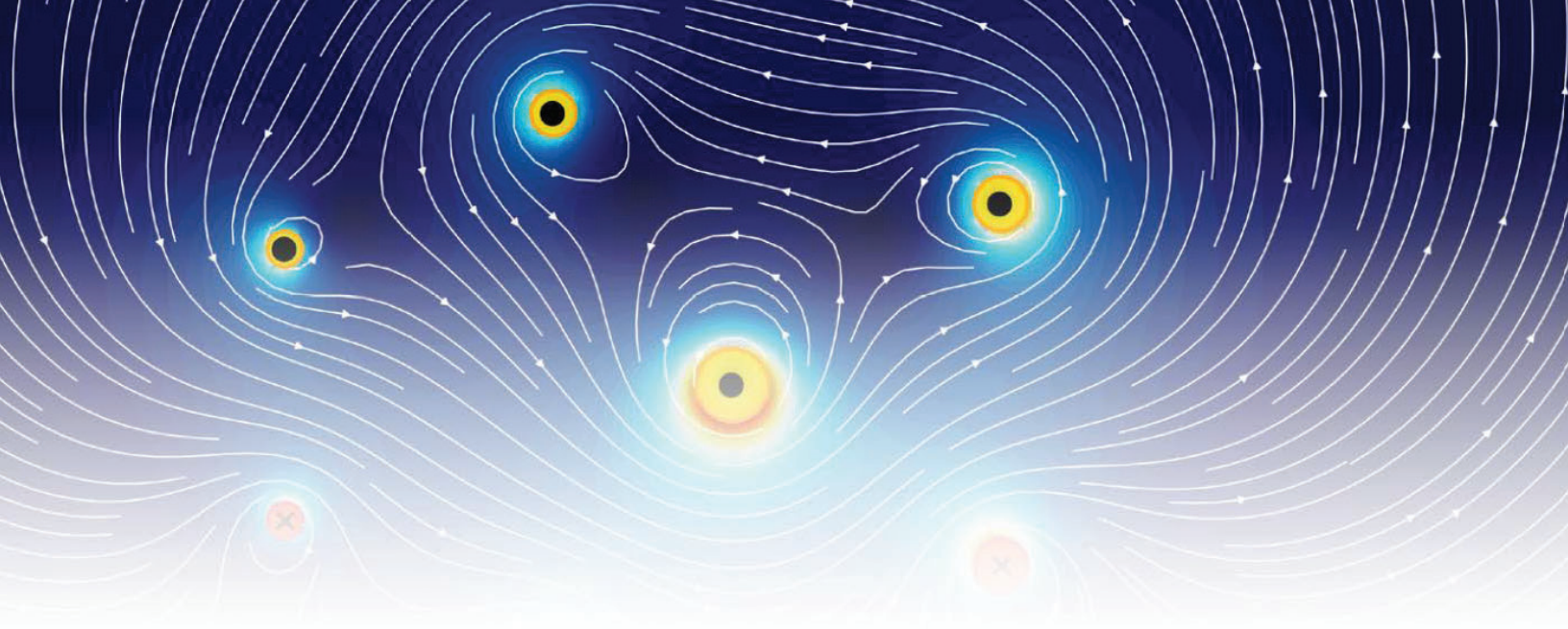
1	Agradecimientos	12
2	Introducción	13
3	Fundamentos matemáticos	14
3.1	Vectores, propiedades y aplicaciones	14
3.1.1	Vectores unitarios y producto escalar	15
3.1.2	Producto vectorial o cruz	20
3.1.3	Coordenadas cilíndricas	24
3.1.4	Coordenadas esféricas	28
3.1.5	Ángulo sólido	31
3.2	Conceptos de cálculo vectorial	33
3.2.1	Gradiente	33
3.2.2	Divergencia	36
3.2.3	Rotacional	41
3.2.4	Laplaciano-D'Alembertiano	44
3.2.5	Gráficos y cálculos en Python	46
3.3	Problemas	54
4	Campos escalares y vectoriales	56
4.1	Principios básicos de campos	56
4.1.1	Campo escalar	56
4.1.2	Campo vectorial	57

4.2	Campo eléctrico y fuerza de Coulomb	58
4.2.1	Teorema de la conservación de la carga	60
4.2.2	Ley de Gauss eléctrica	62
4.2.3	Aplicaciones ley de Gauss: distribuciones de carga	66
4.2.3.1	Línea de carga	66
4.2.3.2	Anillo cargado	68
4.2.3.3	Disco cargado	71
4.2.3.4	Cilindro uniformemente cargado	72
4.2.3.5	Campo eléctrico de una esfera cargada	73
4.2.3.6	Campo eléctrico de una parábola uniformemente cargada	74
4.2.4	Capacitancia y potencial eléctrico	76
4.2.4.1	Potencial eléctrico	76
4.2.4.2	Capacitancia	81
4.2.4.3	Condensador de placas paralelas	82
4.2.4.4	Condensador de cilindros concéntricos	85
4.2.4.5	Capacitor de casquetes esféricos	86
4.2.5	Ley de Ohm y resistividad	86
4.2.6	Circuitos	91
4.2.6.1	Circuitos resistivos, capacitivos e inductivos	92
4.2.6.2	Circuitos D.C resistivos	97
4.2.6.3	Circuitos RLC en régimen DC	100
4.2.6.4	Circuitos RLC en régimen AC	110
4.3	Campo magnético	113
4.3.1	Ley de Biot-Savart	114
4.3.1.1	Campo magnético de una espira circular	117
4.3.1.2	Campo magnético en un solenoide	118
4.3.2	Problemas	119
5	Ondas	120
5.1	Ondas mecánicas y movimiento armónico simple	120
5.1.1	Sistemas masa-resorte	126
5.1.2	Sistema masa-resorte con amortiguamiento y forzamiento	127
5.2	Ondas electromagnéticas	133
5.2.1	Espectro electromagnético	139
5.2.2	Relación entre campo magnético y eléctrico para una onda electromagnética	140
5.3	Óptica	140
5.3.1	Ley de Snell	142
5.3.2	Óptica geométrica	143
5.3.3	Óptica matricial	146
5.3.4	Óptica matricial en Python	151
5.4	Problemas	153



Índice de tablas

4.1	Permitividad relativa de varios materiales [1]	82
4.2	Valores de resistividad para algunos materiales.	89
4.3	Coefficientes de temperatura para diferentes materiales.	91
4.4	Código de colores de las resistencias con tolerancias.	92
4.5	Principales propiedades de la transformada de Laplace	102
4.6	Valores de permeabilidad magnética para varios materiales [2].	115
5.1	Espectro electromagnético.	139
5.2	Ejemplos de índices de refracción para diferentes materiales	141

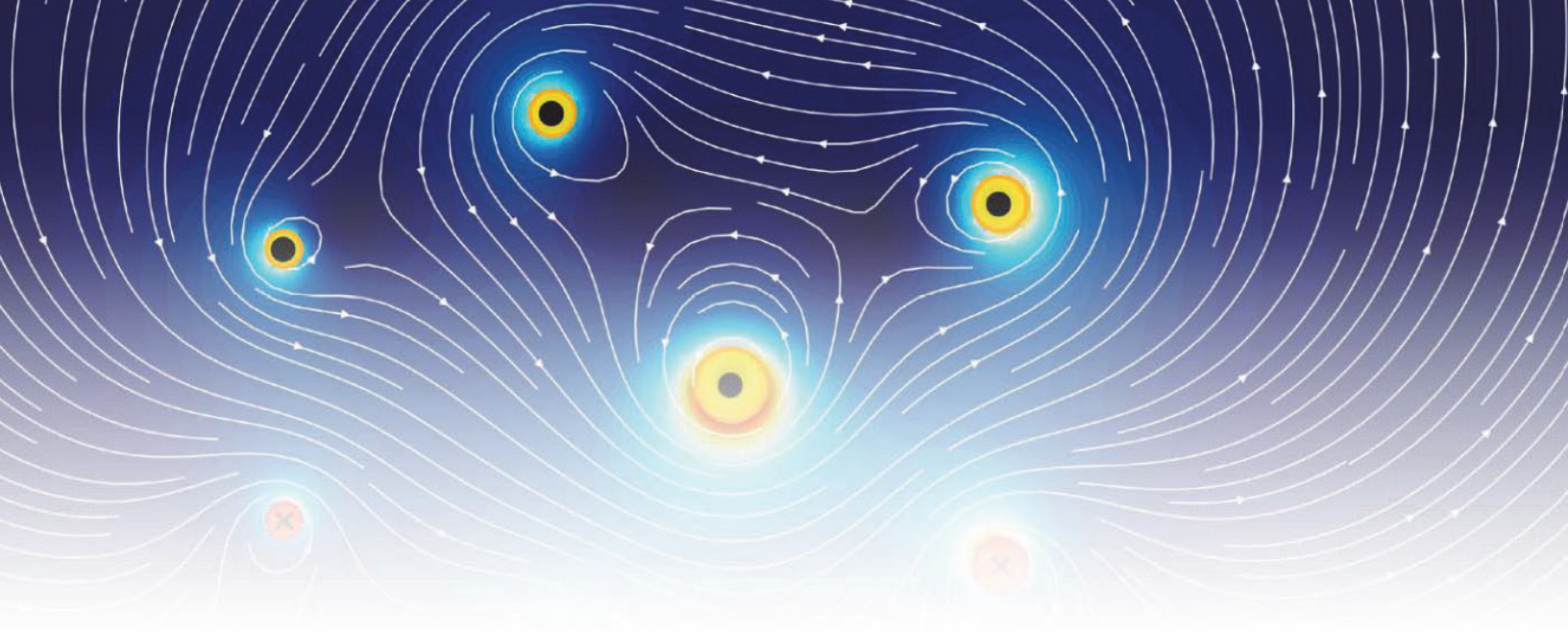


Índice de figuras

3.1	Representación geométrica de un vector en \mathbb{R}^2	15
3.2	Determinación del ángulo entre los vectores a y b	17
3.3	Descripción geométrica del producto cruz o vectorial	21
3.4	Volumen de un paralelepípedo mediante la aplicación del producto vectorial	23
3.5	Representación en coordenadas cilíndricas	24
3.6	Descripción de la relación entre vectores unitarios en coordenadas rectangulares y cilíndricas.	26
3.7	Representación en coordenadas esféricas	28
3.8	Descripción gráfica del concepto de ángulo sólido	31
3.9	Ángulo sólido en una cara de un cubo de lado z	32
3.10	Gráfico de un campo vectorial asociado a cuatro cargas fijas en el plano.	34
3.11	Descripción gráfica de una función y su gradiente.	35
3.12	Mapa de calor de una función y su gradiente respectivo.	35
3.13	Tres casos para la interpretación de $\nabla \cdot F$	37
3.14	Líneas de campo producidas por un par de cargas eléctricas acorde a la ley de Gauss. . 38	
3.15	Interpretación física del teorema de Gauss-Ostrogradsky.	39
3.16	Áreas de flujo para el teorema de la divergencia.	39
3.17	Vorticidad en torno a un eje coordenado.	41
3.18	Prompt de Anaconda (Python).	46
3.19	Menú de configuración de Jupyter Notebook	47
3.20	Campo vectorial de la función paramétrica dada por $U = \text{sen}(x)$ $V = \text{cos}(y)$	48
3.21	Comparación de la solución de sympy con una analítica.	51
3.22	Ejemplo de un gráfico en 3D usando la librería matplotlib.	53
3.23	Mapa de calor de la función $Z = \text{cos}^2(x) + \sqrt{x^2 + y^2}$	54
3.24	Circuito RL en régimen de AC	55
3.25	Esquema del problema que involucra componentes de la fuerza de Lorentz	55
3.26	Calculo del campo eléctrico de una parábola	55

4.1	Campo escalar formado por la función $f(x,y) = \text{Sinc}(x)\text{Sinc}(x^2 + y^2)$	57
4.2	Campo vectorial asociado a una cavidad abierta en la parte superior	58
4.3	Solución de la evolución de la carga en el tiempo, tanto analítica como numérica.	62
4.4	Analogía entre el cubo de agua y una distribución de carga en el espacio.	63
4.5	Descripción del campo eléctrico producido por la carga q_1 en el punto P.	63
4.6	Ley de Gauss desde la perspectiva de la interpretación de ángulo sólido.	64
4.7	Campo eléctrico producido por una línea de carga uniforme q	66
4.8	Campo eléctrico producido por un anillo cargado con densidad lineal de carga λ	68
4.9	Análisis vectorial del campo eléctrico producido por el anillo.	69
4.10	Simulación de un anillo cargado empleando una librería interactiva de Python.	71
4.11	Campo eléctrico generado por un cilindro uniformemente cargado.	72
4.12	Campo eléctrico generado por una esfera uniformemente cargada.	74
4.13	Campo eléctrico en el eje focal debido a una parábola uniformemente cargada.	75
4.14	Trabajo eléctrico realizado para desplazar una carga del punto a al punto b	76
4.15	Ejemplo de aplicación para el potencial eléctrico asociado a dos cargas puntuales.	79
4.16	Simulación de un dipolo comparando potencial y campo eléctrico.	81
4.17	Representación gráfica de un condensador de placas paralelas.	83
4.18	Campo eléctrico asociado a dos placas paralelas enfrentadas de diferente polaridad.	84
4.19	Condensador de cilindros concéntricos.	85
4.20	Condensador de casquetes esféricos con radios R_1 y R_2	86
4.21	Esquema de un resistor de longitud ℓ y área de sección transversal A_ω	88
4.22	Definición de nodo.	93
4.23	Ejemplo ley de voltajes.	94
4.24	Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo.	95
4.25	Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo.	95
4.26	Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo.	97
4.27	Circuito eléctrico resistivo en régimen DC.	98
4.28	Circuito R-L-C en serie.	103
4.29	Función escalón unitario evaluado en un tiempo $a = 2.5$ s.	106
4.30	Función de potencial eléctrico que simula la activación de un interruptor a los 3 s.	106
4.31	Circuito con un interruptor temporizado.	108
4.32	Respuesta en el tiempo del circuito del ejemplo.	109
4.33	Campo magnético asociado a un elemento diferencial de corriente eléctrica.	115
4.34	Campo magnético asociado a una espira circular.	117
4.35	Campo magnético producido por un solenoide.	118
5.1	Esquema de un péndulo simple.	121
5.2	Sistema masa-resorte relajado, en reposo y perturbado.	126
5.3	Sistema masa-resorte con amortiguamiento.	127
5.4	Respuesta del sistema masa-resorte con amortiguamiento variando los parámetros de oscilación natural y coeficiente de amortiguamiento.	130
5.5	Oscilación del sistema masa-resorte sin amortiguamiento.	133
5.6	Onda plana sinusoidal.	137
5.7	Representación de un campo electromagnético.	138
5.8	Trayectoria de la luz en medios con diferente índice de refracción.	142

5.9	Trazado de rayos en una lente delgada.	144
5.10	Trazado geométrico del lado izquierdo de la lente.	144
5.11	Trazado geométrico del lado izquierdo de la lente.	145
5.12	Geometría de un rayo de luz en el espacio libre.	147
5.13	Superficie plana con diferente índice de refracción que el medio circundante.	148
5.14	Esquema óptico de una lente gruesa.	149
5.15	Esquema óptico de un prisma simple.	150
5.16	Sistema óptico compuesto por tres lentes simples (lupa).	153
5.17	Trazado de rayos para formación de imagen en un microscopio.	154

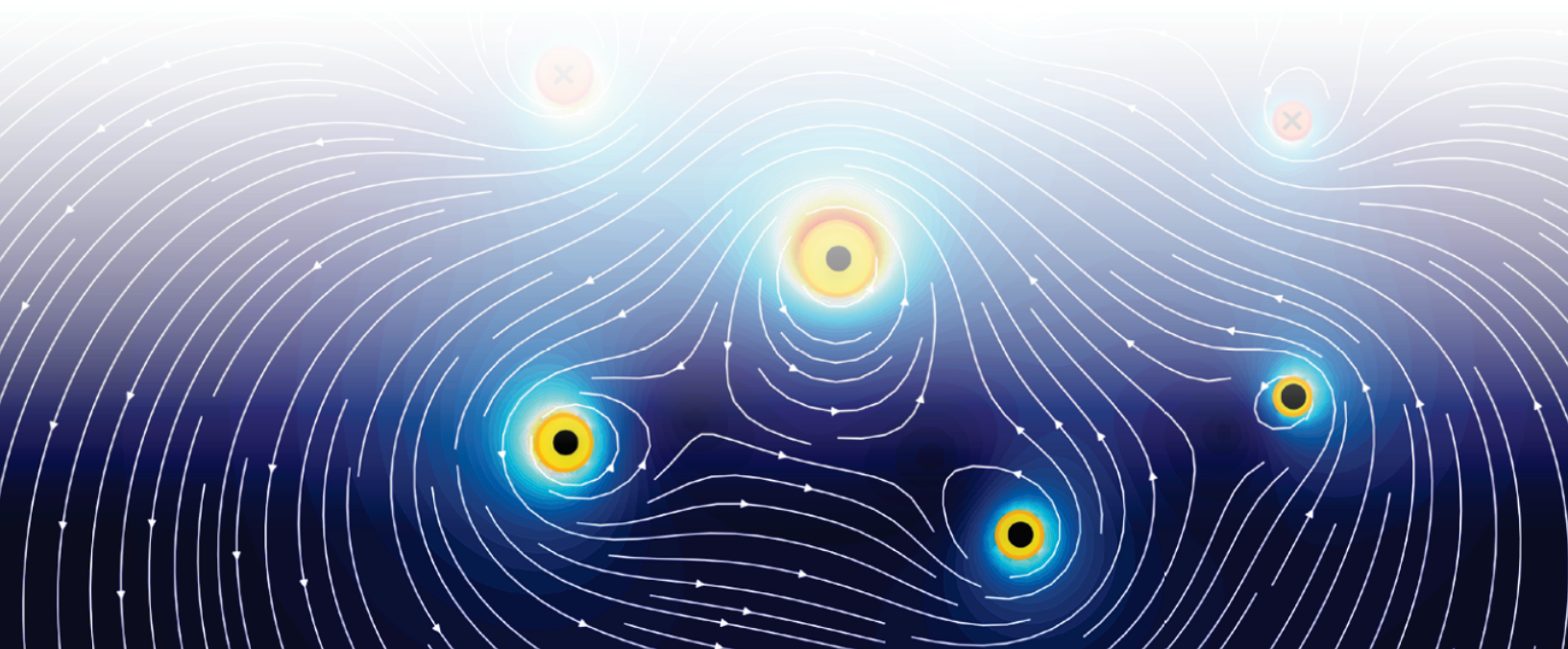


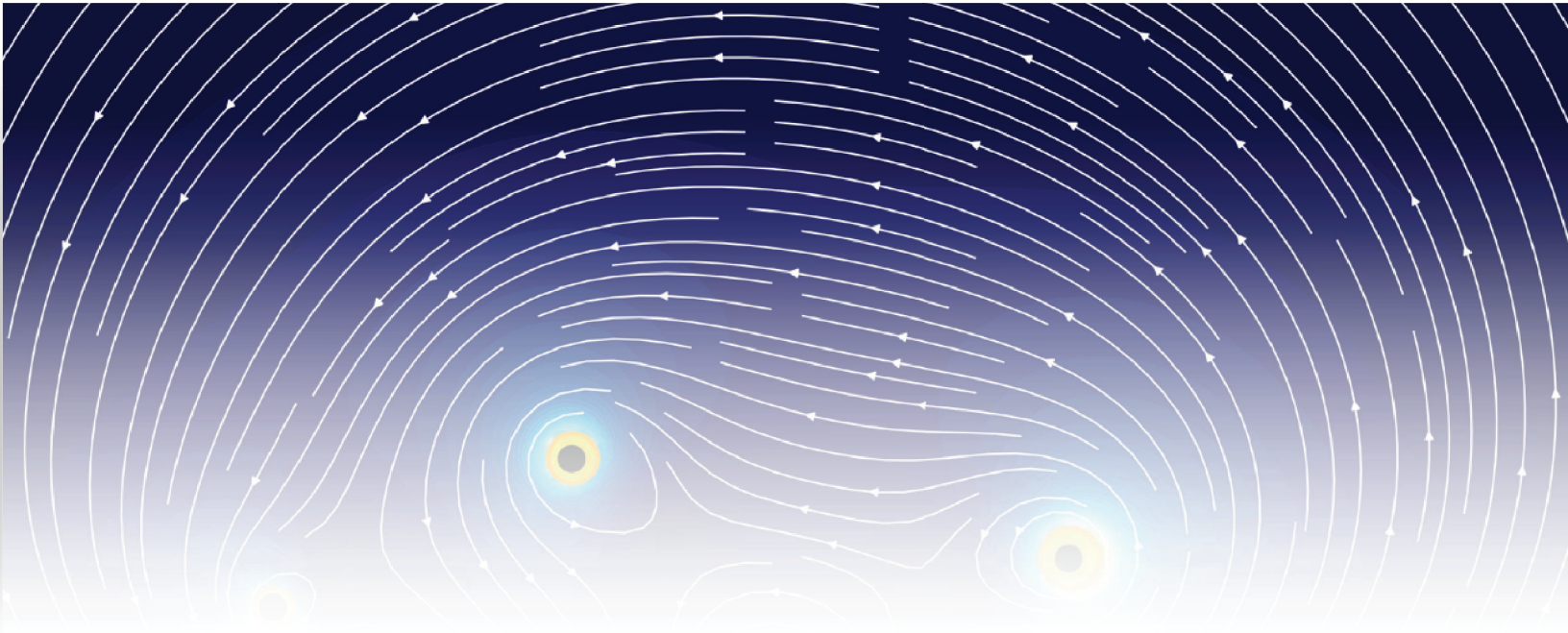
Lista de códigos

3.1	Gráfico de un campo vectorial en Python	47
3.2	Cálculo del producto cruz con numpy	48
3.3	Cálculo de la matriz inversa usando la librería de matemáticas simbólicas de Python	48
3.4	Cambio de coordenadas (rectangulares-cilíndricas) usando la librería sympy	49
3.5	Cálculo de una integral indefinida con sympy	50
3.6	Solución de un ecuación diferencial ordinaria de orden 1 mediante sympy. basicstyle	50
3.7	Código para graficar una función en 3D.	52
3.8	Mapa de calor de una función en 3D.	53
4.1	Campo escalar producido por la función sinc(x).	57
4.2	Código para resolver el problema del ejemplo.	61
4.3	Simulación de un anillo cargado	70
4.4	Simulación del campo eléctrico y magnético.	80
4.5	Código para calcular las corrientes en la malla 4.27.	99
4.6	Ejemplo de interruptor temporizado 4.32.	109
4.7	Solución del sistema lineal de ecuaciones de forma simbólica.	112
5.1	Modelo de péndulo simple usando sympy.	123
5.2	Animación de un sistema de péndulo simple.	124
5.3	Solución de los tres sistemas masa-resorte con amortiguamiento.	130
5.4	Representación en el espacio 3D de una onda electromagnética.	138
5.5	Modelado de un triplete óptico (lupa).	151
5.6	Modelado de un triplete óptico (lupa) cont.	152

**“Si he visto más allá que
otros, es porque me
encuentro parado sobre
hombros de gigantes”**

Isaac Newton



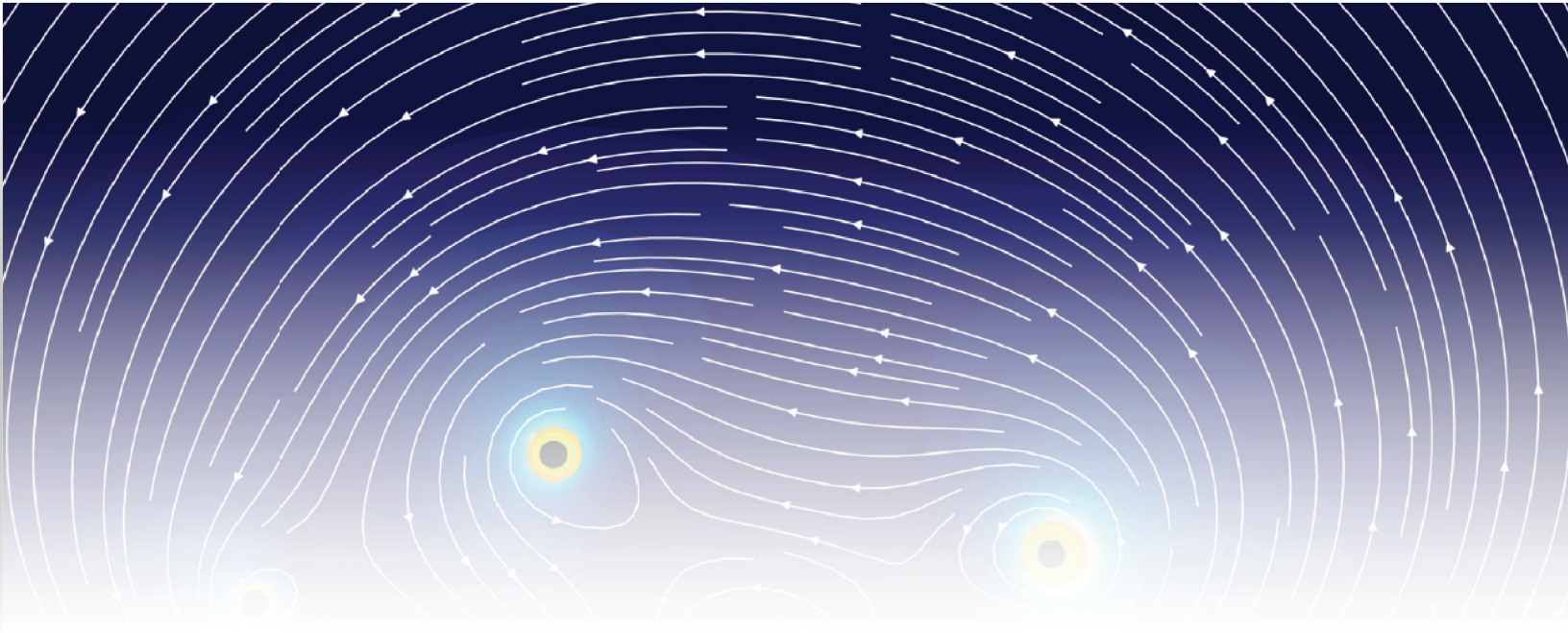


1. Agradecimientos

A mi familia, los que están y los que se fueron, su apoyo en esta aventura siempre fue incondicional sin importar lo loca que pareciera.

Elizabeth y Cassandra, los soles que iluminan mis días.

Mis padres, quienes en parte tienen crédito por esta obra, ya que siempre fueron mis faros en los días oscuros, la guía para llegar aquí. Cassandra, es mi anhelo que algún día puedas disfrutar esta obra, como yo escribiéndotela.



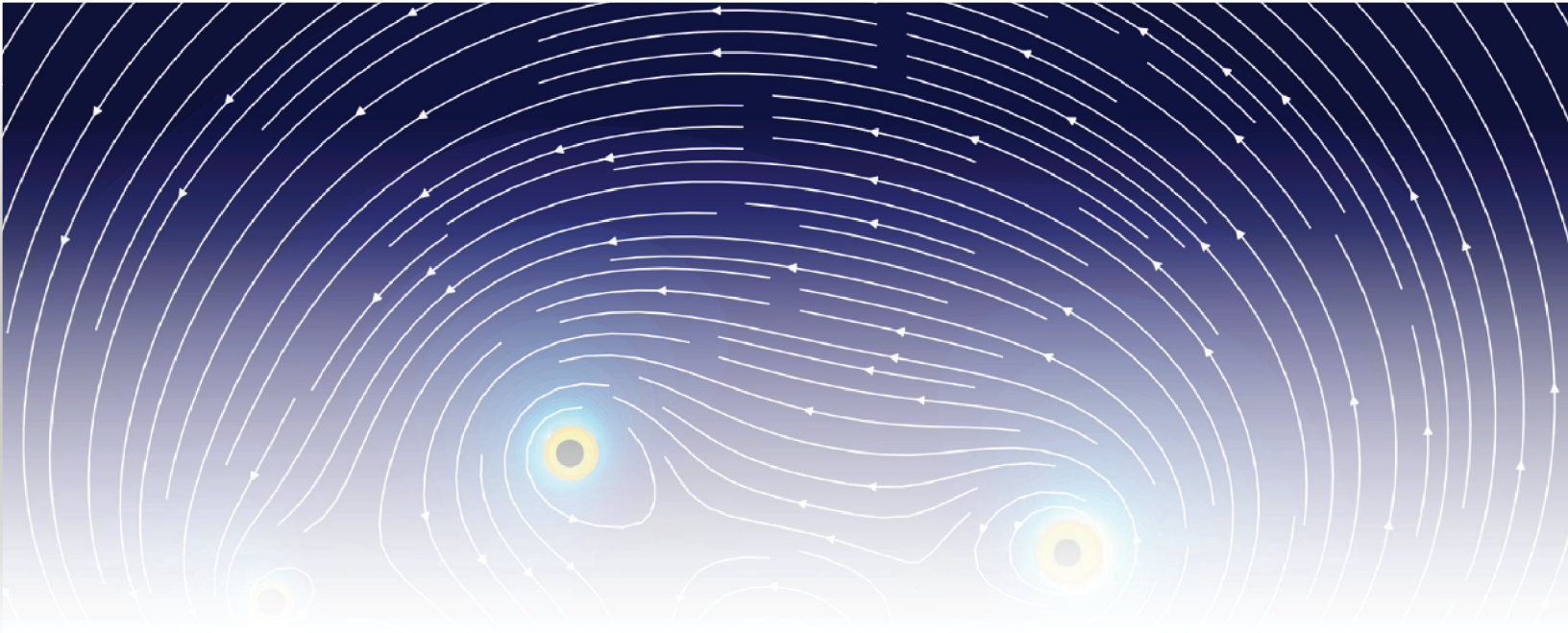
2. Introducción

La física es una ciencia que permite comprender y describir el universo mediante leyes y principios fundamentales. Entre sus ramas más esenciales se encuentra el electromagnetismo, el cual ha sido clave para explicar fenómenos que van desde el funcionamiento de un circuito eléctrico hasta la compleja interacción entre la luz y la materia. Todo ello se enmarca en cinco relaciones fundamentales: las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz, que en conjunto han sido cruciales tanto para el desarrollo de la tecnología moderna como para nuestra comprensión del mundo natural.

Este libro está diseñado como guía de estos conceptos clave de la física, comenzando con las herramientas matemáticas necesarias para su comprensión: los vectores, el cambio de sistemas de coordenadas y su aplicación para la solución de problemas relacionados con la primera ley de Gauss, esto es, el comportamiento del campo eléctrico a partir de distribuciones de carga.

En el cuarto capítulo se estudiarán sistemas físicos influenciados por la presencia de campos eléctricos. Se analizará el potencial eléctrico y su relación con la capacitancia, lo cual conducirá a un estudio detallado de los circuitos eléctricos a partir de la deducción de la ley de Ohm. Asimismo, se abordará el concepto clásico de magnetismo y sus aplicaciones, con un énfasis particular en la ley de Biot-Savart. Cabe destacar que las temáticas tratadas estarán enfocadas fuera del contexto de la mecánica cuántica, aunque se podrán incluir alusiones puntuales a esta.

Una consecuencia natural de las leyes de Maxwell es el estudio de la luz. Por ello, el quinto capítulo se dedica de manera especial al estudio de la óptica y las propiedades de las ondas. En este contexto, se ofrece una introducción al estudio de estas mediante la deducción de las expresiones para el movimiento armónico simple, lo cual sirve como puerta de entrada a conceptos fundamentales en esta área de la física. Además, se presenta una breve introducción a la espectroscopía. El objetivo de este texto es mostrar al estudiante el amplio abanico de posibilidades que derivan del estudio de la electricidad, el magnetismo y las ondas.



3. Fundamentos matemáticos

Este capítulo tiene como objetivo aclarar y estructurar conceptos matemáticos fundamentales, con la mirada puesta en la comprensión de los fenómenos físicos. El propósito es facilitar el recorrido por el dominio de los campos, cuya naturaleza, en ocasiones contraintuitiva, puede generar confusión en el lector. No obstante, tales dificultades pueden superarse con una base matemática sólida. En palabras de Kurt Lewin, "no hay nada más práctico que una buena teoría"[3], una máxima aplicada con rigurosidad por James Clerk Maxwell, cuyo aporte será objeto de un análisis detallado en esta obra.

3.1 Vectores, propiedades y aplicaciones

Un vector es una herramienta fundamental para describir cualquier propiedad física que requiera tanto dirección como magnitud para comprender la naturaleza del fenómeno. Por ejemplo, en el caso del concepto de fuerza, no basta con determinar únicamente su magnitud; es la dirección la que otorga sentido al proceso involucrado.

De manera coloquial, consideremos la tarea de un empacador en un supermercado al llevar las compras al automóvil del cliente. En esta acción intervienen dos elementos: uno explícito, la dirección en la que se deben mover las bolsas, y otro implícito, el esfuerzo necesario para trasladarlas al destino acordado. Esta acción puede representarse mediante una serie de flechas direccionales que describen cada movimiento y esfuerzo realizados por la persona hasta completar el proceso.

De forma similar, es posible representar un sinnúmero de conceptos físicos utilizando vectores, como el campo eléctrico, el campo magnético o el campo gravitacional.

En la figura 3.1 se muestra un vector en dos dimensiones, el cual queda completamente caracterizado por el ángulo que forma con uno de los ejes coordenados y por su magnitud o norma, $||V||$. En general, se tiene:

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} \tag{3.1}$$

En el caso del ángulo, como se verá, el procedimiento para determinar la posición relativa entre dos vectores en un espacio normado depende de la dimensionalidad de dicho espacio. En el caso representado en la figura, este cálculo se reduce a una simple relación trigonométrica. Sin embargo, a medida que se incrementa el número de grados de libertad, esta tarea se vuelve considerablemente más compleja.

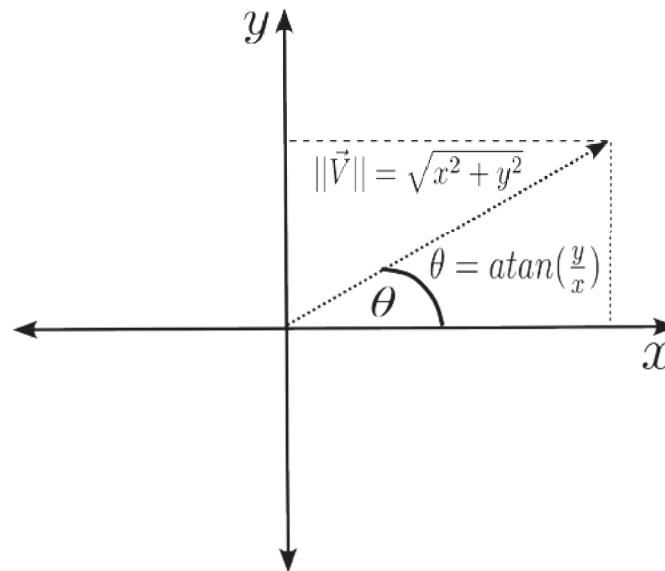


Figura 3.1 Representación geométrica de un vector en \mathbb{R}^2

Así mismo, la suma y la resta pueden realizarse elemento a elemento, por ejemplo, sean $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ y $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$ un par de vectores definidos en \mathbb{R}^3 , las operaciones $\vec{a} + \vec{b}$ y $\vec{a} - \vec{b}$ se definen respectivamente como:

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3] \tag{3.2}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3] \tag{3.3}$$

O en otras palabras tanto la suma como la resta se realizan componente a componente.

3.1.1 Vectores unitarios y producto escalar

Antes de explorar otras propiedades y operaciones relevantes, es fundamental definir el concepto de vector unitario. Este tipo de vector permite especificar sin ambigüedades la dirección de un objeto dentro de un sistema de coordenadas definido. Como su nombre lo indica, un vector unitario es

aquel cuya magnitud es igual a uno, y se representa mediante el símbolo \hat{a} . Matemáticamente, se define de la siguiente manera:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{\vec{a}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \quad (3.4)$$

Es decir, un vector unitario se obtiene dividiendo el vector original entre su magnitud, como se mostró en la figura 3.1. Cabe destacar que los vectores convencionales se diferencian de los vectores unitarios en su notación, ya que se representan con una "flecha" sobre la letra correspondiente. Además, cualquier vector puede expresarse como una combinación lineal de vectores unitarios, es decir:

$$\vec{z} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \hat{e}_i \quad (3.5)$$

El concepto de producto punto o producto escalar hace referencia a una operación fundamental entre vectores. Esta operación representa la proyección de un vector sobre otro, es decir, la porción de la "sombra" del primer vector que cubre al segundo. Su resultado es siempre un número real. Además, el producto punto también indica el grado de paralelismo entre los dos vectores, como se analizará a continuación.

Sean $\vec{a} = a_1\hat{e}_x + a_2\hat{e}_y + a_3\hat{e}_z$ y $\vec{b} = b_1\hat{e}_x + b_2\hat{e}_y + b_3\hat{e}_z$ un par de vectores en \mathbb{R}^3 . Entonces, el producto punto o escalar se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\theta) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i \delta_{ij} b_j \quad (3.6)$$

con,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{for } i = j \\ 0, & \text{for } i \neq j \end{cases} \quad (3.7)$$

Esta función, conocida como delta de Kronecker, actúa como un filtro que elimina los elementos en posiciones diferentes. De este modo, únicamente se multiplica el componente asociado al vector unitario en la dirección x del vector \vec{a} con el correspondiente en el vector \vec{b} , y así sucesivamente para las demás direcciones. Esta definición resulta especialmente útil cuando este tipo de operaciones se repiten de forma recurrente.

Algunas propiedades importantes del delta de Kronecker son:

$$\delta_{ij} a_j = a_i \quad (3.8)$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j \quad (3.9)$$

$$\delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \quad (3.10)$$

Ejemplo

Sean $\vec{a} = 1.\hat{e}_x + 2.\hat{e}_y + 5.\hat{e}_z$ y $\vec{b} = 2.\hat{e}_x + 1.\hat{e}_y + 2.\hat{e}_z$, entonces calcular $\vec{a}.\vec{b}$, aplicando cada una de las definiciones.

$$\vec{a}.\vec{b} = ||a||||b||\cos(\theta) \quad (3.11)$$

calculando las magnitudes de cada uno de los vectores se tiene que:

$$||a|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{30} \quad ||b|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \quad (3.12)$$

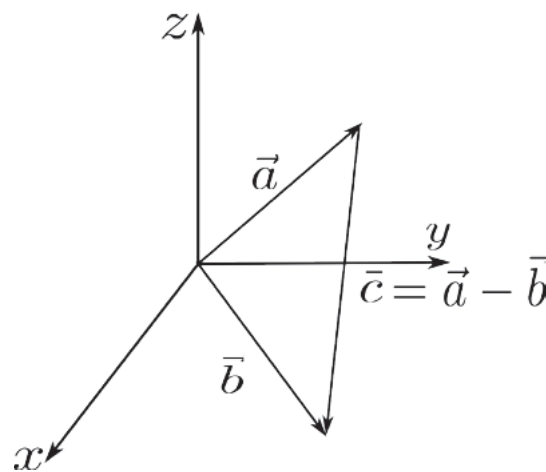


Figura 3.2 Determinación del ángulo entre los vectores a y b

Ahora, es necesario determinar el ángulo de la figura 3.2. Se sabe que la magnitud del vector $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ es igual a:

$$||c||^2 = (1 - 2)^2 + (2 - 1)^2 + (5 - 2)^2 = 11,02 \quad (3.13)$$

Aplicando ley de cosenos se tiene que:

$$c^2 = ||a||^2 + ||b||^2 - 2||a||||b||\cos(\theta) \quad (3.14)$$

∴

$$\theta = \text{acos}\left(-\frac{11,02 - 39}{6\sqrt{30}}\right) = 31,64^\circ \quad (3.15)$$

1

Con esta información ahora es posible calcular el producto escalar haciendo uso de la primera definición:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{30} \cos(31,64^\circ) \approx 14 \quad (3.16)$$

Ahora, se empleara la segunda definición, la cual consiste en multiplicar los términos correspondientes de cada vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (1)(2) + (2)(1) + (2)(5) = 14 \quad (3.17)$$

Finalmente, aplicando el delta de Kronecker se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \cdot \hat{e}_x + a_2 \cdot \hat{e}_y + a_3 \cdot \hat{e}_z)(b_1 \cdot \hat{e}_x + b_2 \cdot \hat{e}_y + b_3 \cdot \hat{e}_z) \delta_{i,j} = \\ &= a_1 \cdot b_1 \delta_{1,1} + a_1 \cdot b_2 \delta_{1,2} + a_1 \cdot b_3 \delta_{1,3} + \\ &= a_2 \cdot b_1 \delta_{2,1} + a_2 \cdot b_2 \delta_{2,2} + a_2 \cdot b_3 \delta_{2,3} + \\ &= a_3 \cdot b_1 \delta_{3,1} + a_3 \cdot b_2 \delta_{3,2} + a_3 \cdot b_3 \delta_{3,3} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta la definición del delta de Kronecker, se tiene que solo aquellos elementos con igual subíndice se conservarán, debido a que $\delta_{i,j} = 1 \forall i = j$.:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 \delta_{1,1} + a_2 \cdot b_2 \delta_{2,2} + a_3 \cdot b_3 \delta_{3,3} = (1)(2) + (2)(1) + (5)(2) = 14 \quad (3.19)$$

A propósito de la ley de cosenos, una forma interesante de demostrar esta propiedad es mediante el producto punto:

Ejemplo

Sea $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ como se pudo apreciar en la figura 3.2, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{c} \cdot \vec{c} &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{b}) \\ &= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\theta) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Tener en cuenta que: $\vec{a} \cdot \vec{a} = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \|\vec{a}\|^2$.

Propiedades del producto escalar

¹En adelante: $a \cos(\theta) = \cos^{-1}(\theta) = \arccos(\theta)$

Sean \vec{a} y \vec{b} vectores en \mathbb{R}^3 . Entonces, se dice que cumplen el siguiente conjunto de propiedades:

Propiedad conmutativa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (3.21)$$

Aplicando la definición de producto punto, se tiene que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \delta_{i,j} b_j = a_i b_i = a_j b_j \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta que $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, entonces cumplen con las propiedades del producto usuales, entre ellas la conmutatividad, \therefore

$$a_i b_i = b_i a_i = b_j a_j = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (3.23)$$

Propiedad distributiva

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (3.24)$$

Bilinealidad

$$\vec{a} \cdot (r\vec{b} + \vec{c}) = r(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c}) \quad (3.25)$$

con $r \in \mathbb{R}$

Multiplicación por un escalar

$$(c_1 \vec{a}) \cdot (c_2 \vec{b}) = c_1 c_2 (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.26)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Ortogonalidad

Sean $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \rightarrow$ son perpendiculares $\leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Vectores unitarios y bases ortonormales

Sin entrar en definiciones matemáticas rigurosas, aunque recomendables y necesarias, podemos decir que una base ortonormal es un espacio vectorial dotado con un producto escalar en el cual la norma o magnitud de cada elemento es igual a la unidad. Además, su producto punto es igual a cero, de ahí su nombre. Esto implica lo siguiente:

$$\|\hat{e}_i\| = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad (3.27)$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \hat{e}_i \delta_{i,j} \hat{e}_j = 0 \text{ for } i \neq j \quad (3.28)$$

Por ejemplo, el conjunto base formado por los siguientes vectores unitarios corresponde a los conocidos vectores canónicos unitarios en el espacio euclidiano para \mathbb{R}^3 .

$$\hat{e}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\hat{e}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\hat{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Por lo tanto, $(x, y, z) = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$. Como se observa, la aplicación de la base sobre el sistema de coordenadas hace que se aislen matemáticamente los elementos correspondientes, permitiendo reescribir cada punto como una combinación lineal del valor de la coordenada y el vector unitario asociado. Este mismo criterio puede aplicarse a otros sistemas de coordenadas. En este texto, profundizaremos en los sistemas cilíndricos y esféricos. Sin embargo, antes de adentrarnos en estas representaciones, definiremos una operación vectorial útil, fundamental para el tratamiento de los campos.

Producto vectorial o cruz

El producto cruz o producto vectorial (simbolizado por \times) es un operador que involucra dos vectores $\in \mathbb{R}^3$, y cuyo resultado es un vector perpendicular a los dos vectores originales. Geométricamente, se puede interpretar como el volumen del paralelepípedo formado por estos vectores. Cabe resaltar una curiosa propiedad conocida como la regla de la mano derecha, que consiste en extender la mano derecha en la dirección del primer vector y girarla hacia el segundo. El pulgar apuntará hacia la dirección del vector resultante de esta operación. Tal como se muestra en la figura 3.3, el vector \vec{c} es normal a los vectores \vec{a} y \vec{b} , como sugiere la regla mencionada.

La definición matemática de esta operación es la siguiente: Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, entonces el producto cruz o \times se puede expresar de la siguiente forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = ||a|| ||b|| \text{sen}(\theta) \hat{n} \quad (3.32)$$

Donde \hat{n} es el vector unitario normal tanto a \vec{a} como a \vec{b} , lo que nos lleva a la necesidad de determinar cómo estimar este vector. En principio, esto se puede lograr mediante la forma determinante del producto cruz, es decir:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{e}_x - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{e}_y + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{e}_z \quad (3.33)$$

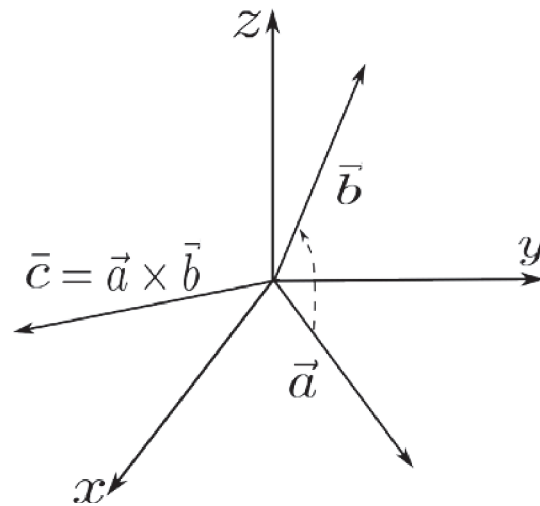


Figura 3.3 Descripción geométrica del producto cruz o vectorial

De aquí se sigue que:

$$\begin{aligned} \hat{e}_x \times \hat{e}_y &= e_z \\ \hat{e}_z \times \hat{e}_x &= e_y \\ \hat{e}_y \times \hat{e}_z &= e_x \end{aligned} \tag{3.34}$$

Una manera alternativa de calcular el producto cruz de dos vectores es mediante la introducción del "pseudo-tensor" de Levi-Civita, el cual se define de la siguiente manera:

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} +1, & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1, & (i,j,k) = (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3) \\ 0, & i = j, j = k, i = k \end{cases} \tag{3.35}$$

El signo depende del tipo de permutación realizada sobre los subíndices i, j, k , de manera que si la permutación es par, el resultado es $+1$, y si es impar, el signo será negativo. Con permutaciones pares e impares nos referimos a que, en el primer caso, el número de intercambios de subíndices es par. Por ejemplo, para la permutación de $(1,2,3)$ a $(2,3,1)$, se requieren dos permutaciones (cambios de posición): primero, el 2 cambia con el 1, y luego el 1 cambia con el 3, lo que da como resultado un número par de permutaciones. De manera análoga, se puede probar que en el caso en que la función entrega el valor de -1 , el número de permutaciones es impar. Teniendo en cuenta lo anterior, el producto cruz se puede definir como:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \epsilon_{i,j,k} a_j b_k \tag{3.36}$$

Los índices superiores indican sumatoria, con el fin de simplificar la notación matemática. Este manejo algebraico de índices se conoce como la notación de Einstein, la cual facilita el cálculo de valores específicos del producto vectorial sin necesidad de desarrollar toda la operación. Esto

quedará claro con un ejemplo.

Ejemplo

Sean $\vec{a} = 1\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 10\hat{e}_z$ y $\vec{b} = 1\hat{e}_x + 1\hat{e}_y + 3\hat{e}_z$. Se debe calcular $\vec{a} \times \vec{b}$ utilizando la notación de índices de Einstein y mediante el determinante.

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b})^i &= \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k \rightarrow \\
 (\vec{a} \times \vec{b})^1 &= \varepsilon_{1,2,3} a_2 b_3 + \varepsilon_{1,3,2} a_3 b_2 = (+1)(2)(3) + (-1)(10)(1) = -4\hat{e}_x \\
 (\vec{a} \times \vec{b})^2 &= \varepsilon_{2,1,3} a_1 b_3 + \varepsilon_{2,3,1} a_3 b_1 = (-1)(1)(3) + (+1)(10)(1) = 7\hat{e}_y \\
 (\vec{a} \times \vec{b})^3 &= \varepsilon_{3,1,2} a_1 b_2 + \varepsilon_{3,2,1} a_2 b_1 = (+1)(1)(1) + (-1)(2)(1) = -\hat{e}_z \\
 \therefore (\vec{a} \times \vec{b}) &= -4\hat{e}_x + 7\hat{e}_y - \hat{e}_z
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Se observa que fue posible calcular cada elemento de forma individual sin necesidad de resolver completamente el producto cruz. Ahora se procederá a calcular el mismo sistema, esta vez empleando el determinante, con el fin de comparar ambos métodos.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = ((2)(3) - (10)(1))\hat{e}_x - ((1)(3) - (10)(1))\hat{e}_y + ((1)(1) - (2)(1))\hat{e}_z \tag{3.38}$$

∴

$$\vec{a} \times \vec{b} = -4\hat{e}_x + 7\hat{e}_y - \hat{e}_z \tag{3.39}$$

Como se puede observar, al principio la notación de Einstein puede parecer difícil de manejar. Sin embargo, una vez que se domina el símbolo de Levi-Civita, se vuelve más manejable y útil que la forma tradicional de calcular esta operación. Cabe señalar que, cuando se calculó cada uno de los términos en el primer caso, el superíndice i actúa como una sumatoria, haciendo que los subíndices de los vectores conmuten con cada término.

En la figura 3.4 se muestra una de las aplicaciones clásicas. Como se mencionó anteriormente, el significado geométrico en un espacio euclidiano es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores involucrados en la operación.

A continuación se presentaran las propiedades mas comunes asociadas con este operador.

Propiedades del producto cruz

Sean $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores en \mathbb{R}^3 , con r perteneciente al conjunto de los números \mathbb{R} , entonces se tienen por validas el siguiente conjunto de propiedades.

Paralelismo

Sea θ el ángulo comprendido entre lo vectores \vec{a} y \vec{b} , entonces si $\theta = 0^\circ, 180^\circ$, así mismo, si \vec{a} ó

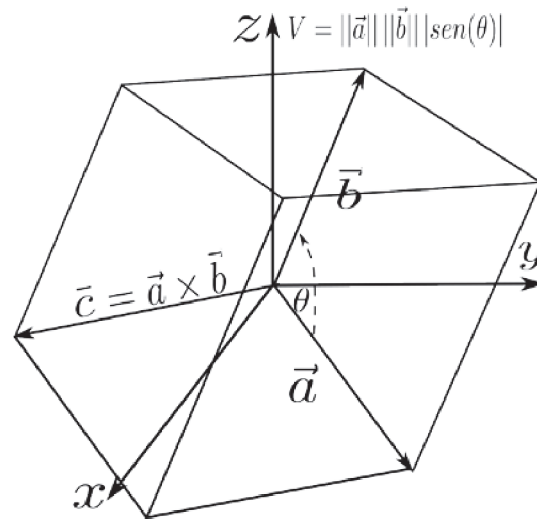


Figura 3.4 Volumen de un paralelepípedo mediante la aplicación del producto vectorial

$\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$, de aquí se desprende que $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Propiedad distributiva

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ Lo anterior se puede demostrar si aplicamos la definición de producto vectorial en términos de la notación de Einstein, entonces:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \varepsilon_{i,j,k} a_j (b_k + c_k) \quad (3.40)$$

con lo cual, aplicando la propiedad distributiva en \mathbb{R} se tiene:

$$= \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k + \varepsilon_{i,j,k} a_j c_k \quad (3.41)$$

A través de la definición, se puede afirmar que:

$$= (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) \quad (3.42)$$

Multiplicación por un escalar

$$(r\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (3.43)$$

Anticonmutativa

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (3.44)$$

Identidad de Jacobi

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad (3.45)$$

Triple producto

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad (3.46)$$

Triple producto vectorial

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \quad (3.47)$$

En el contexto de la física de campos, estas propiedades tienen como objetivo principal simplificar expresiones vectoriales complejas, lo cual permite estimar con mayor facilidad diversas magnitudes, como la intensidad y dirección de los campos eléctrico y magnético, entre otras. Siguiendo esta estrategia, se introduce una herramienta matemática adicional de gran utilidad para facilitar dichos cálculos: el cambio de sistema de coordenadas, con el fin de adaptarlo a la geometría del problema.

3.1.3 Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas rectangulares cartesianas se caracterizan por no imponer restricciones a los valores de sus variables. Es decir, (x, y, z) puede variar arbitrariamente en el intervalo $-\infty < (x, y, z) < \infty$. Sin embargo, otros sistemas de coordenadas imponen ciertas restricciones para garantizar un grado de simetría. Es precisamente esto lo que abre la puerta a la posibilidad de simplificar modelos físicos cuyos parámetros característicos son periódicos y/o simétricos, lo que permite resolver problemas de alto grado de complejidad. En el caso de las coordenadas cilíndricas, como su nombre lo indica, se busca ajustarlas a problemas que puedan adaptarse a esta configuración. Como se puede apreciar en la figura 3.5, las coordenadas principales son (ρ, ϕ, z) , y presentan las siguientes restricciones.

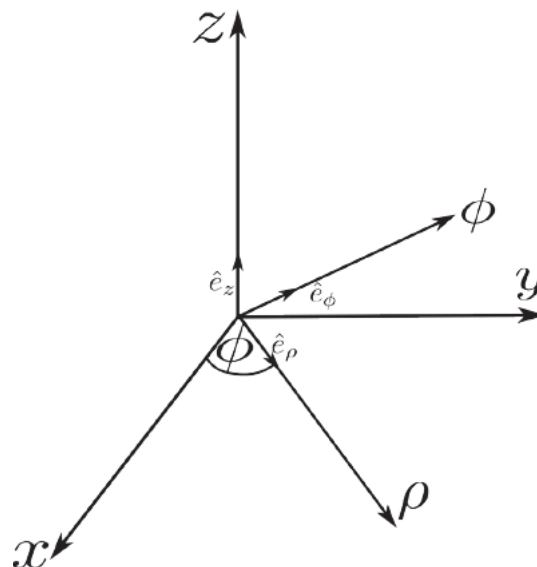


Figura 3.5 Representación en coordenadas cilíndricas

$$0 \leq \rho \leq \infty \quad (3.48)$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \tag{3.49}$$

$$-\infty \leq z \leq \infty \tag{3.50}$$

Por lo tanto, cualquier vector se puede expresar como una combinación lineal en términos de los vectores unitarios asociados a estas variables de la siguiente manera:

$$\vec{a} = a_\rho \cdot \hat{e}_\rho + a_\phi \cdot \hat{e}_\phi + a_z \cdot \hat{e}_z \tag{3.51}$$

Así mismo, la norma o magnitud se define de la misma manera que en coordenadas cartesianas,

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\phi^2 + a_z^2} \tag{3.52}$$

Las relaciones entre vectores unitarios son las siguientes:

$$\hat{e}_\rho \times \hat{e}_\phi = \hat{e}_z \tag{3.53}$$

$$\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = \hat{e}_\phi \tag{3.54}$$

$$\hat{e}_\phi \times \hat{e}_z = \hat{e}_\rho \tag{3.55}$$

En relación con esta misma figura, se pueden obtener las relaciones que permiten conectar entre sistemas de coordenadas:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.56}$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.57}$$

$$z = z \tag{3.58}$$

y en términos de (ρ, ϕ, z) quedaría

$$x = \rho \cos(\phi) \tag{3.59}$$

$$y = \rho \text{sen}(\phi) \tag{3.60}$$

Lo último surge al resolver el triángulo rectángulo asociado a los ejes x y y . Ahora bien, la pregunta que surge es la siguiente: ¿cómo se relacionan los sistemas de coordenadas entre sí? ¿Cuál es la transformación necesaria para pasar de un sistema coordinado a otro? La respuesta está en las transformaciones matriciales que se introducirán a continuación.

$$\begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

La situación inversa, es decir, las relaciones que conectan (x,y,z) con (ρ, ϕ, z) están dadas por:

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) & 0 \\ \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Estas relaciones se pueden derivar considerando que cualquier vector puede representarse en un nuevo sistema de coordenadas como una combinación lineal en términos de sus vectores unitarios base. Por lo tanto, es necesario reescribir cada uno de los vectores unitarios del sistema de coordenadas original en función del nuevo sistema.

$$\begin{aligned} \hat{e}_x &= \alpha \hat{e}_\rho + \beta \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_y &= \sigma \hat{e}_\rho + \gamma \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (3.63)$$

Para determinar las variables $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$, se hará uso de la figura 3.6 y se aplicará el producto punto a ambos lados de la ecuación 3.63 de la siguiente manera:

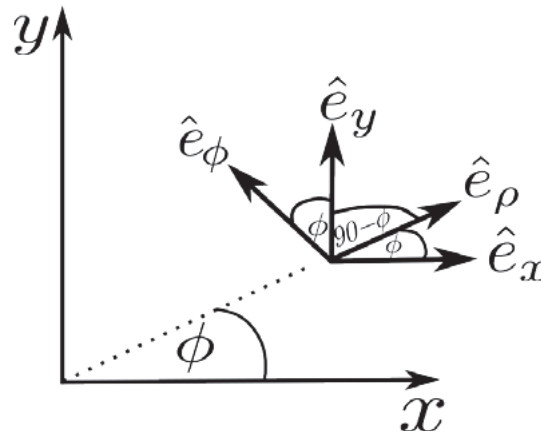


Figura 3.6 Descripción de la relación entre vectores unitarios en coordenadas rectangulares y cilíndricas

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho = \alpha \hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho + \beta \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\rho \quad (3.64)$$

Dado que $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\rho = 1$ y $\hat{e}_\rho \cdot \hat{e}_\phi = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho = \alpha \quad (3.65)$$

De la definición de proyección de vectores.

$$\text{Proy}(\vec{a})_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}|| ||\vec{b}||} = \cos(\theta) \quad (3.66)$$

Donde θ representa el ángulo entre los dos vectores, en este caso se obtiene lo siguiente:

$$\cos(\phi) = \hat{e}_x \cdot \hat{e}_\rho = \alpha \quad (3.67)$$

Para β se tiene:

$$\hat{e}_x \cdot -\hat{e}_\phi = \beta = \cos(90 - \phi) = \cos(90)\cos(\phi) + \text{sen}(90)\text{sen}(\phi) \quad (3.68)$$

\therefore

$$\hat{e}_x \cdot \hat{e}_\phi = -\text{sen}(\phi) \quad (3.69)$$

Con base en lo anterior y reemplazando en la ecuación 3.63 la descripción del vector unitario \vec{e}_x , se obtiene lo siguiente:

$$\hat{e}_x = \cos(\alpha) \cdot \hat{e}_\rho - \text{sen}(\alpha) \cdot \hat{e}_\phi \quad (3.70)$$

Siguiendo un proceso similar, también es posible reescribir \hat{e}_y en términos de los vectores unitarios en coordenadas cilíndricas.

$$\hat{e}_y = \text{sen}(\phi) \cdot \hat{e}_\rho + \cos(\phi) \cdot \hat{e}_\phi \quad (3.71)$$

Para el caso de \hat{e}_z , resulta evidente que no se requiere ninguna transformación, ya que esta coordenada se mantiene sin cambios, tal como se mencionó al inicio de esta sección. Las ecuaciones matriciales se obtienen al reemplazar la notación de combinación lineal de los vectores por su representación en forma de vectores fila o columna, multiplicados por el vector base junto con su respectiva matriz de transformación.

Diferenciales en coordenadas cilíndricas

Diferencial de línea

$$d\ell = d\rho \hat{e}_\rho + \rho d\phi \hat{e}_\phi + dz \hat{e}_z \quad (3.72)$$

Diferenciales de superficie

$$\begin{aligned} dS_\rho &= \rho d\phi dz \hat{e}_\rho |_{\rho=cte} \\ dS_\phi &= d\rho dz \hat{e}_\phi |_{\phi=cte} \\ dS_z &= \rho d\rho d\phi \hat{e}_z |_{z=cte} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Diferencial de volumen

$$dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz \tag{3.74}$$

3.1.4 Coordenadas esféricas

Siguiendo el mismo razonamiento, es posible definir un sistema de coordenadas que se ajuste a sistemas físicos con simetría esférica. En este contexto, el nuevo conjunto de coordenadas está representado por (r, θ, ϕ) , tal como se muestra en la figura 3.7. A los ángulos θ y ϕ se les denomina “colatitud” y “azimutal”, respectivamente, mientras que r corresponde a la coordenada radial. Como dato curioso, el término colatitud proviene del concepto geográfico de latitud; específicamente, se refiere al ángulo complementario de la latitud, dado por $\theta = 90^\circ - \angle_{latitud}$. A continuación, se presentan las restricciones correspondientes a los valores de cada una de estas coordenadas.

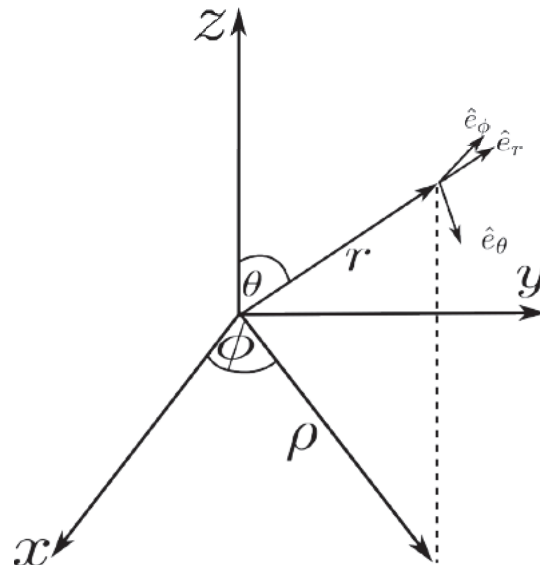


Figura 3.7 Representación en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq \infty \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi \end{aligned} \tag{3.75}$$

Por lo anterior, cualquier vector puede representarse en términos de los vectores unitarios asociados de la siguiente manera:

$$\vec{v} = v_r \cdot \hat{e}_r + v_\theta \cdot \hat{e}_\theta + v_\phi \cdot \hat{e}_\phi \tag{3.76}$$

El resto de las relaciones se pueden deducir de manera similar al caso anterior. A partir de la figura 3.7, se obtiene que la norma y las relaciones entre los vectores unitarios son las siguientes:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_r \times \hat{e}_\theta &= \hat{e}_\phi \\ \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r &= \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\theta \times \hat{e}_\phi &= \hat{e}_r \end{aligned} \tag{3.78}$$

Las relaciones entre sistemas de coordenadas rectangulares y esféricos están dadas por:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.79}$$

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \tag{3.80}$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{3.81}$$

O en términos de coordenadas cartesianas rectangulares

$$x = r \text{sen}(\theta) \cos(\phi) \tag{3.82}$$

$$y = r \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) \tag{3.83}$$

$$z = r \cos(\theta) \tag{3.84}$$

Por lo tanto, las matrices de transformación para el vector $\vec{v} = v_r \cdot \hat{e}_r + v_\theta \cdot \hat{e}_\theta + v_\phi \cdot \hat{e}_\phi$ serían:

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \cos(\phi) & \text{sen}(\theta) \text{sen}(\phi) & \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \cos(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \cos(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) & -\text{sen}(\phi) \\ \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\phi) \cos(\theta) & \cos(\phi) \\ \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{bmatrix} \tag{3.86}$$

Diferenciales en coordenadas esféricas

Diferencial de línea

$$d\ell = dr \hat{e}_r + r d\theta \hat{e}_\theta + r \text{sen}(\theta) d\phi \hat{e}_\phi \tag{3.87}$$

Diferenciales de superficie

$$\begin{aligned} dS_r &= r^2 \text{sen}(\theta) d\theta d\phi \hat{e}_r |_{r=cte} \\ dS_\theta &= r \text{sen}(\theta) dr d\phi \hat{e}_\theta |_{\theta=cte} \\ dS_\phi &= r dr d\theta \hat{e}_\phi |_{\phi=cte} \end{aligned} \tag{3.88}$$

Diferencial de volumen

$$dV = r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \quad (3.89)$$

A continuación, se presentará un ejemplo en el que se aplican algunos de los conceptos vistos hasta este punto:

Ejemplo

Sea el punto $O(2, 2, 1)$ y el vector $\vec{V} = x^2 \cdot \hat{e}_x + (y^2 + z^2) \cdot \hat{e}_y$, conviértase O, \vec{V} en coordenadas cilíndricas.

De 3.55 y 3.56 se pueden obtener los valores de ρ y ϕ de la siguiente manera:

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad (3.90)$$

$$\phi = \text{atan}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (3.91)$$

Por tanto, el punto O en coordenadas cilíndricas está dado por $(\rho, \phi, z) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 1)$ y el vector en coordenadas cartesianas quedaría como: $\vec{V} = 4 \cdot \hat{e}_x + 5 \cdot \hat{e}_y$, y este a su vez se puede transformar a coordenadas cilíndricas empleando las transformaciones matriciales (ver ecuación 3.61) \therefore

$$\begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\phi \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 + z^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Reemplazando los valores de x, y, z y efectuando la multiplicación matricial, entonces se tendría lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} v_\rho \\ v_\phi \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \sin(\phi) + 4 \cos(\phi) \\ -4 \sin(\phi) + 5 \cos(\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Por lo tanto, el nuevo vector en coordenadas cilíndricas se obtiene al reemplazar los valores dados y calculados en la expresión 3.92:

$$\vec{V} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}\right) \cdot \hat{e}_\rho + \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2}\right) \cdot \hat{e}_\phi \quad (3.94)$$

3.1.5 Ángulo sólido

Este concepto matemático se refiere a la apariencia de un objeto a una cierta distancia, donde la posición del observador es el vértice y el ángulo formado por dos líneas desde su ubicación es el ángulo sólido Ω que se subtende. La figura 3.8 ayudará a comprender mejor lo expuesto anteriormente.

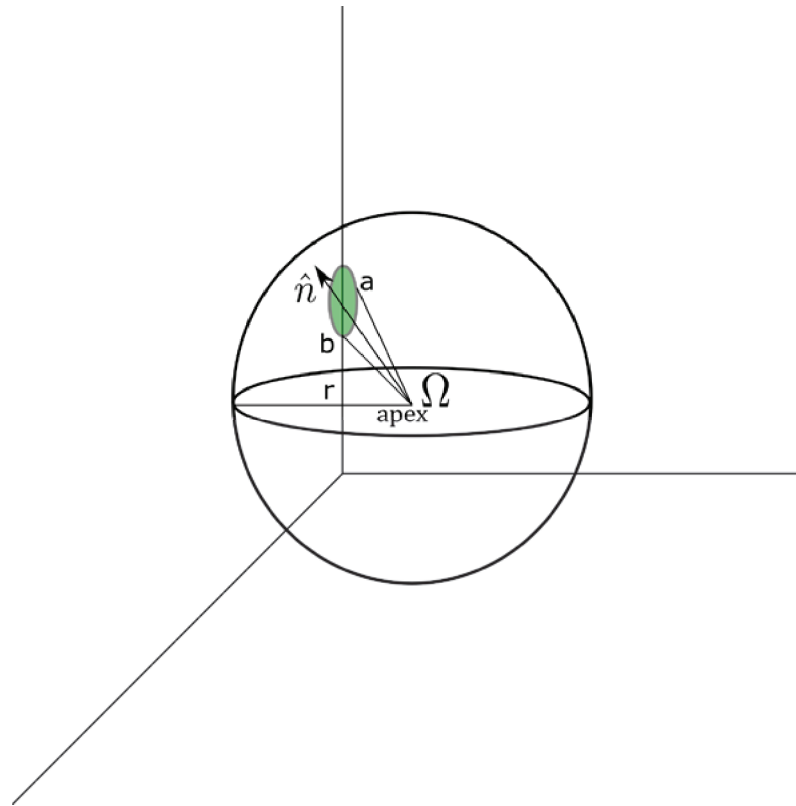


Figura 3.8 Descripción gráfica del concepto de ángulo sólido

Un ejemplo más simple es el caso de la luna, cuya área aparente desde la Tierra difiere de su área real, pero curiosamente es similar a la del sol, lo que da lugar a los eclipses. La relación de distancias entre ambos astros permite que la luz del sol sea bloqueada, produciendo este fenómeno.

En el sistema internacional de unidades (SI), se emplea el estereorradián (sr) para medir este tipo de ángulos. Su definición matemática es la siguiente:

$$\Omega = \int \int_s \frac{\hat{n} \cdot da}{r^2} = \frac{A}{r^2} = \iint_s \text{sen}(\theta) d\theta d\phi \quad (3.95)$$

Esto se refiere a la superficie vista desde el punto de vista de un observador situado en el vértice de la esfera unitaria, formada por el cono que se genera al rotar las líneas de visión desde dicho punto. El siguiente ejemplo tiene como objetivo aclarar este concepto.

Ejemplo

Determine el ángulo sólido descrito por una de las caras del cubo de lado $2z$ centrado en el origen, como se aprecia en la figura 3.9.

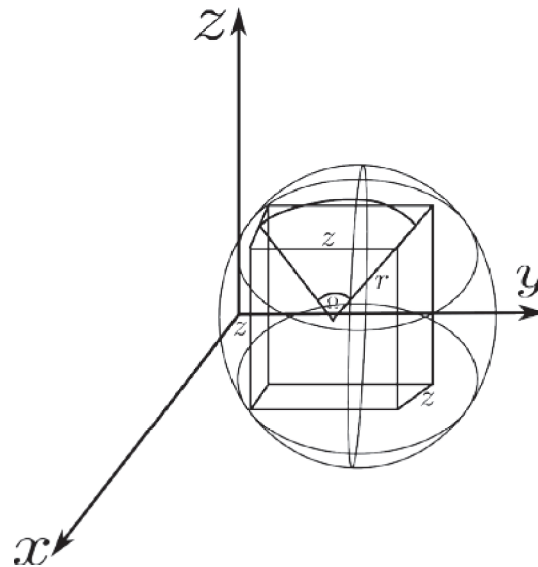


Figura 3.9 Ángulo sólido en una cara de un cubo de lado z

Para resolver este problema, es necesario calcular cada uno de los términos de 3.95. En este caso, el producto punto $\hat{n} \cdot da$ se puede obtener utilizando su definición, es decir:

$$\hat{n} \cdot da = \cos(\phi) dx dy \tag{3.96}$$

Donde da corresponde a los elementos diferenciales que conforman una de las caras del cubo, y ϕ es el ángulo entre el elemento de área da y el vector unitario normal \hat{n} , que está dirigido desde el origen (apex). Además, r representa la distancia desde el origen hasta el elemento de superficie da .

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.97}$$

Teniendo en cuenta que la longitud del semilado es z , entonces:

$$\cos(\phi) = \frac{z}{r} \tag{3.98}$$

∴

$$\Omega = \int_{-z}^z \int_{-z}^z \frac{z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \tag{3.99}$$

Esta integral es algo compleja, por lo que se recurre a Wolfram Alpha para encontrar su solución. Cabe destacar que al final del capítulo se incluirán códigos en Python que permitirán realizar muchos de estos cálculos de forma sencilla. En este caso, el comando utilizado para el cálculo fue el siguiente:

$$\text{integral}(z/(x^2+y^2+z^2)^{(3/2)}, \{x, -z, z\}, \{y, -z, z\})$$

que da como resultado lo siguiente

$$\frac{2\pi z}{3\sqrt{z^2}} = \frac{2\pi}{3} \tag{3.100}$$

3.2 Conceptos de cálculo vectorial

La discusión hasta aquí ha surgido de la necesidad de establecer un lenguaje común para explicar la fenomenología derivada del estudio de los campos y las consecuencias de su perturbación (las ondas). Si bien es un tema denso, es fundamental para entender y avanzar en el conocimiento de muchos procesos naturales interesantes. No existe en la civilización moderna ni en la naturaleza ningún elemento, proceso o artefacto que no esté influenciado por sus interacciones con campos de cualquier naturaleza. De hecho, la creación misma es producto de las perturbaciones de campos (véase mecánica cuántica de campos). En este sentido, se hace necesario profundizar un poco más en las descripciones matemáticas más básicas para poder abordar una minúscula porción de todos estos impresionantes fenómenos naturales. En nuestro caso, nos enfocaremos en la electricidad y el magnetismo, aunque de manera superficial abordaremos la gravedad. La razón de esto último radica en la dificultad de proporcionar en un solo curso la fundamentación necesaria para siquiera rozar el complejo mundo de las ondas gravitacionales (ecos de las más violentas muestras de poder: la colisión de agujeros negros).

3.2.1 Gradiente

Este concepto es importante porque permite determinar hacia qué posición existe un incremento de los valores de una cantidad escalar. Por ejemplo, si se tiene una habitación en la cual se toman varios valores de temperatura, el gradiente sería la dirección hacia la cual hay un incremento de esta variable. Otro ejemplo podría ser los diferentes valores que toma la presión atmosférica dependiendo de la altura; en ese escenario, el gradiente sería el vector que apunta hacia el océano, lugar donde la presión atmosférica es más alta. Matemáticamente se puede expresar como la variación de una función multivariada $f(x,y,z)$ (campo escalar) respecto de un punto dado y su resultado es un campo vectorial, donde cada una de las componentes indica la dirección de aumento de la función estudiada. Esto es²:

$$\vec{\nabla}f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{e}_z \tag{3.101}$$

La representación gráfica del gradiente junto con la función F permite una mejor comprensión de su significado. Por ejemplo, en la figura 3.10 se muestra el gradiente del campo eléctrico generado por cuatro cargas equidistantes en el plano (x,y) . Esta herramienta es de gran utilidad, ya que permite predecir y analizar sistemas en los que la dirección de los componentes varía con la evolución del sistema, o evaluar el impacto de agregar o retirar elementos en un sistema físico. En situaciones reales, resulta fundamental identificar estas líneas de campo, como en el caso de la instalación de antenas de telecomunicaciones de alta potencia. Esto es necesario para minimizar riesgos a la salud,

²El operador ∇ se conoce como nabla o del.

asegurando que dichas antenas estén ubicadas a una distancia suficiente para que la intensidad de sus líneas de campo sea mínima en las cercanías de las personas [4].

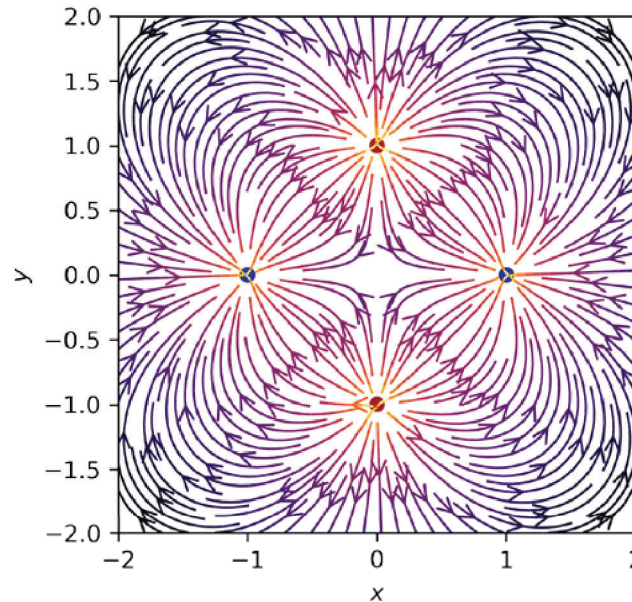


Figura 3.10 Gráfico de un campo vectorial asociado a cuatro cargas fijas en el plano

El siguiente ejemplo abordara más a fondo el concepto. Sea $F(x, y) = x^2 \cos(y) + y^2 \sin(x)$; por tanto, su gradiente es:

$$\vec{\nabla}F = (2x \cos(y) + \cos(x)y^2) \cdot \hat{e}_x + (2y \sin(x) - x^2 \sin(y)) \cdot \hat{e}_y \quad (3.102)$$

Nótese que cada una de las componentes del gradiente se obtuvo a partir de derivar toda la función con respecto a cada una de ellas. En el caso puntual de la dirección x , se tiene $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos(y) + y^2 \sin(x)) = (2x \cos(y) + \cos(x)y^2) \cdot \hat{e}_x$. Al graficar este par de funciones, se puede comprender mejor el significado del gradiente. En este caso, las figuras 3.11a y 3.11b corresponden, respectivamente, a la función original y a su gradiente.

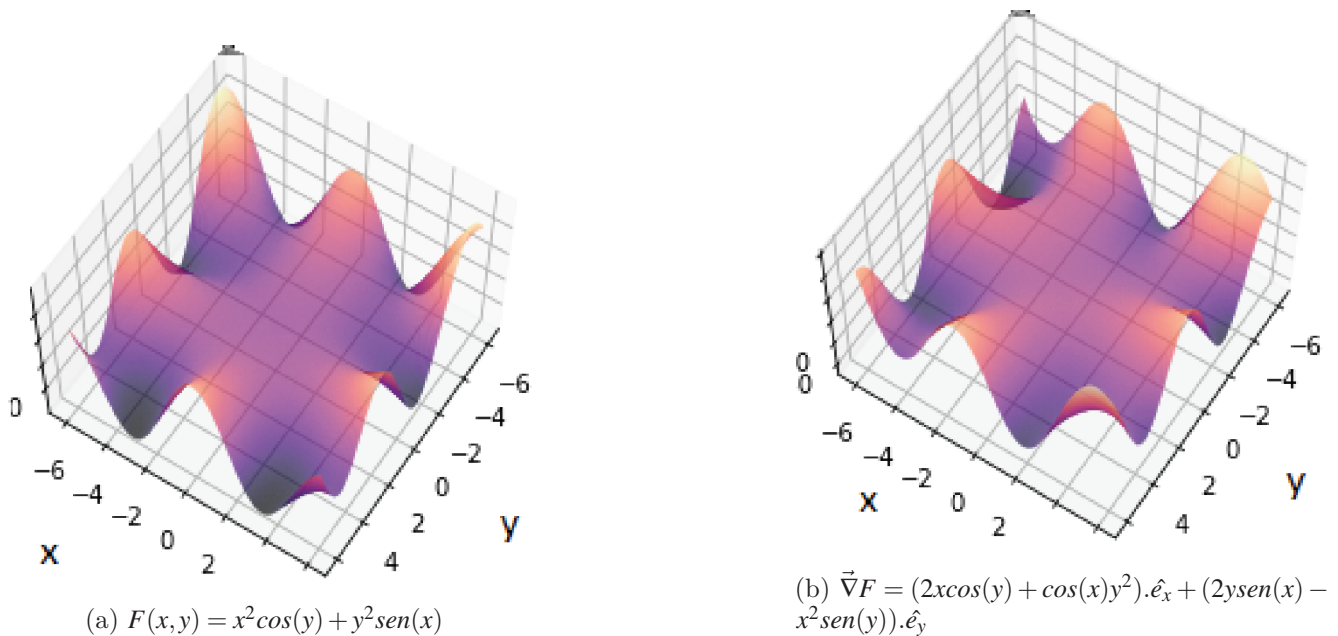


Figura 3.11 Descripción gráfica de una función y su gradiente

El propósito de esta representación es identificar, a través del gradiente, las regiones de crecimiento y decrecimiento en el campo escalar F . En este caso, las áreas oscuras corresponden a valores menores, mientras que las áreas más claras indican valores más altos de la función. De este modo, se puede afirmar que existe un gradiente positivo en dirección hacia la región negativa del eje y . Muchas veces, y este es precisamente el caso, es complejo advertir la dirección del cambio, por eso se recurre a otro tipo de gráficos denominados mapas de calor (heat maps) que permiten identificar de forma más simple estos cambios. Las figuras 3.12a y 3.12b se ilustra lo previamente mencionado, destacando las regiones de crecimiento y decrecimiento mediante el uso de colores.

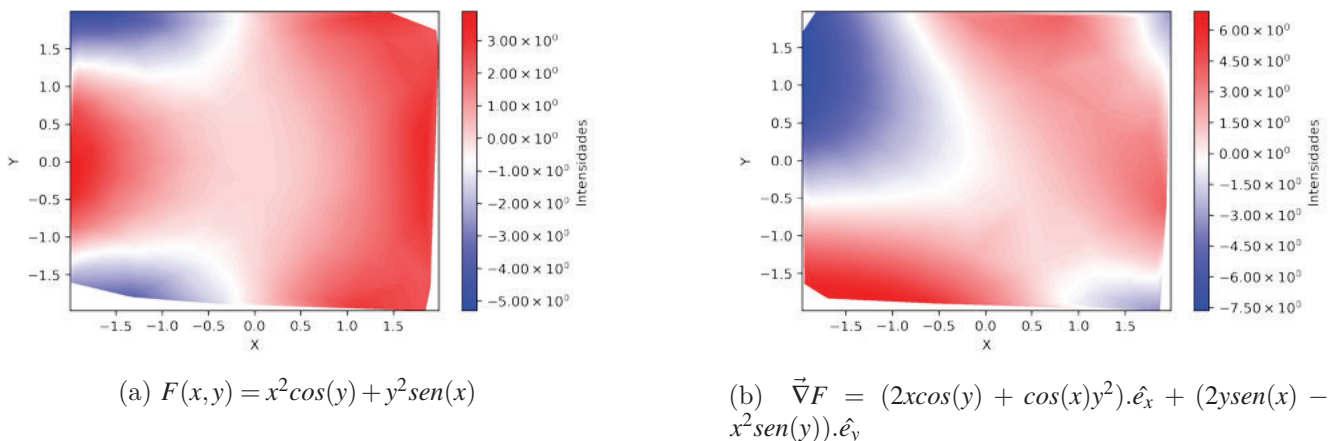


Figura 3.12 Mapa de calor de una función y su gradiente respectivo

Como se mencionó anteriormente, se observa un crecimiento hacia la región más negativa del eje y . Sin embargo, la situación es más compleja, ya que existen otras regiones relevantes donde la función también crece. Asimismo, es evidente la presencia de mínimos, lo que puede resultar

útil dependiendo del análisis que se desee realizar. Aunque este tipo de evaluación tiene un valor limitado cuando se trata de funciones arbitrarias como la planteada en este caso, adquiere una importancia significativa cuando estas expresiones están vinculadas a fenómenos físicos o problemas de ingeniería, como se demostrará más adelante.

Finalmente, se presentan las versiones del gradiente en coordenadas esféricas y cilíndricas.

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla}F = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e}_z \quad (3.103)$$

Coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla}F = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \text{sen}(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi \quad (3.104)$$

Las propiedades del gradiente mas utilizadas son las siguientes:

\forall función definida en \mathbb{R}^3 el gradiente de $\vec{\nabla}$ cumple.

Linealidad

$$\vec{\nabla}(\alpha F(x, y, z) + \beta G(x, y, z)) = \alpha \vec{\nabla}F + \beta \vec{\nabla}G \quad (3.105)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y F, G funciones $\in \mathbb{R}^3$.

Regla del producto

$$\vec{\nabla}(F(x, y, z)G(x, y, z)) = F\vec{\nabla}G + G\vec{\nabla}F \quad (3.106)$$

3.2.2 Divergencia

A diferencia del gradiente, este operador transforma un campo vectorial en un campo escalar, obteniendo como resultado la densidad volumétrica del flujo saliente en cada punto. Físicamente, esto representa los puntos donde el flujo (líneas de campo) emerge o diverge (de ahí su nombre), o donde converge, actuando como una especie de sumidero. Su definición es la siguiente: sea $\vec{F}(x, y, z)$ una función vectorial en \mathbb{R}^3 tal que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \hat{e}_z \right) \cdot (F_x \hat{e}_x + F_y \hat{e}_y + F_z \hat{e}_z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (3.107)$$

Como se observa en las figuras 3.13, la interpretación de cada una de las posibilidades depende de la dirección de las líneas de campo, lo que permite modelar diferentes situaciones. Por ejemplo, en el flujo de fluidos, un sumidero se asemejaría a lo mostrado en la figura 3.13a, mientras que, si se tratara de una carga eléctrica positiva, el resultado sería el opuesto: líneas de campo emergiendo desde una región en el plano (x, y) , como se aprecia en la figura 3.13b. De igual manera, cuando la divergencia es 0, como ocurre en la ley de Gauss para el magnetismo o en la ausencia de monopolos

magnéticos $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, las líneas de flujo no se ven alteradas en su trayectoria, tal como se muestra en la figura 3.13c. Al igual que en el caso anterior, también existen expresiones correspondientes a los otros sistemas de coordenadas.

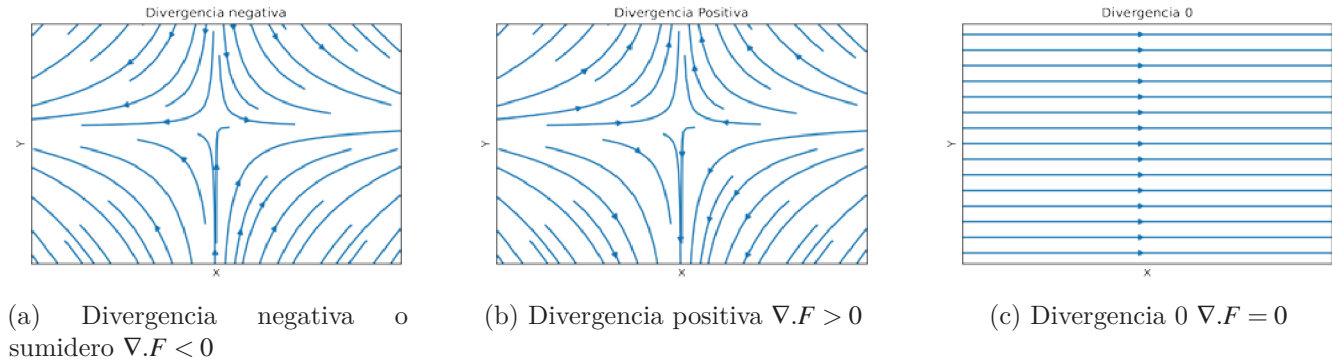


Figura 3.13 Tres casos para la interpretación de $\nabla \cdot F$

Divergencia en coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \cdot F = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{3.108}$$

Divergencia en coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \cdot F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (F_\theta \sin(\theta)) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \tag{3.109}$$

Un ejemplo práctico de lo anterior es el campo eléctrico generado por dos cargas eléctricas opuestas separadas por una distancia d . Esta configuración ilustra la representación de la ley de Gauss para el campo eléctrico.

$$\vec{\nabla} \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{3.110}$$

Esta temática, junto con su versión magnética, se desarrollará más adelante en detalle. Por el momento, es suficiente comprender su representación gráfica.

Propiedades de la divergencia

Sean \vec{F}, \vec{G} un par de funciones vectoriales en \mathbb{R}^3 , entonces.

Linealidad

$$\vec{\nabla} \cdot (\alpha \vec{F} + \beta \vec{G}) = \alpha \vec{\nabla} \cdot F + \beta \vec{\nabla} \cdot G \tag{3.111}$$

Con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

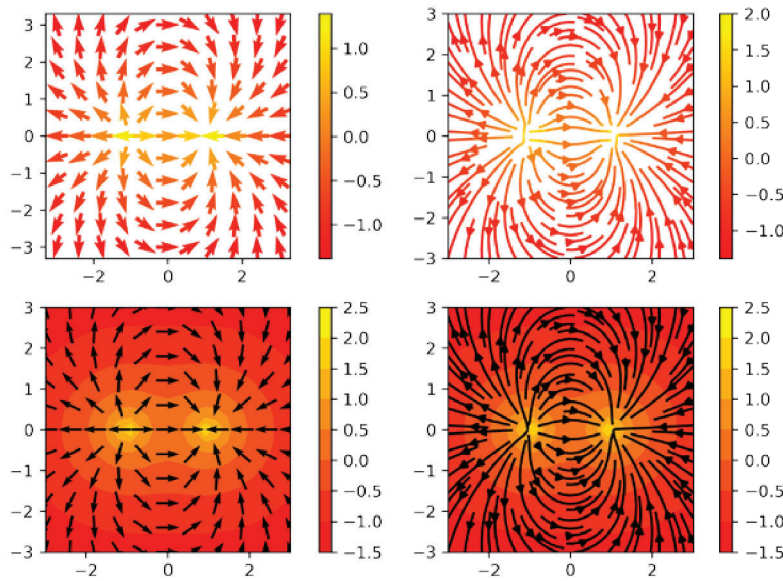


Figura 3.14 Líneas de campo producidas por un par de cargas eléctricas acorde a la ley de Gauss

Regla del producto

Sea ψ una función escalar, entonces, la regla del producto dictamina lo siguiente:

$$\vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{F}) = \vec{\nabla}(\psi) \cdot \vec{F} + \psi(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \quad (3.112)$$

Teorema Gauss-Ostrogradsky o de la divergencia

Sea V un volumen en \mathbb{R}^3 que posee una frontera S , esto es una superficie que pertenece a V y al mismo tiempo lo contiene. Sea F un campo vectorial que pertenece a V , entonces (Ver figura 3.15):

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oiint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) dS \quad (3.113)$$

La interpretación física de este teorema consiste en analizar cada una de las integrales. En el lado izquierdo, se tiene una integral de volumen que representa todas las fuentes o sumideros responsables de que las líneas de campo entren o salgan del volumen. En otras palabras, este término actúa como un contador que suma todas las líneas de campo presentes dentro del volumen. Por otro lado, en el lado derecho, aparece una integral que recorre toda la superficie S que delimita el volumen V , sumando todas las líneas de campo entrantes y salientes. Por tanto, este teorema busca determinar el flujo neto que emerge de un volumen arbitrario V . Como se mencionó anteriormente, permite realizar cálculos sobre el comportamiento de sistemas físicos que operan de esta manera. Ejemplos de ello incluyen el flujo de agua a través de una tubería, el caudal de un río en una región específica o el campo eléctrico que emana de una agrupación de cargas. Más adelante, se ilustrará la utilidad de esta poderosa herramienta matemática.

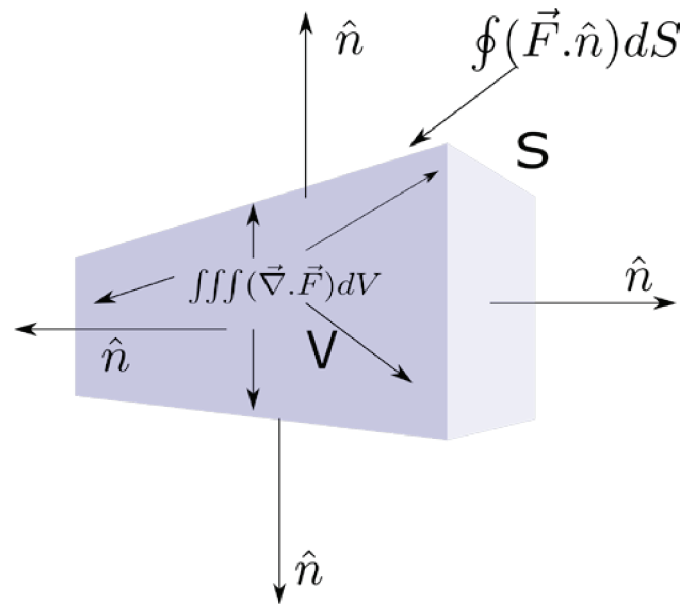


Figura 3.15 Interpretación física del teorema de Gauss-Ostrogradsky

Para demostrar la ecuación 3.113 de forma simple se requiere partir de un cubo en \mathbb{R}^3 , de la figura 3.16.

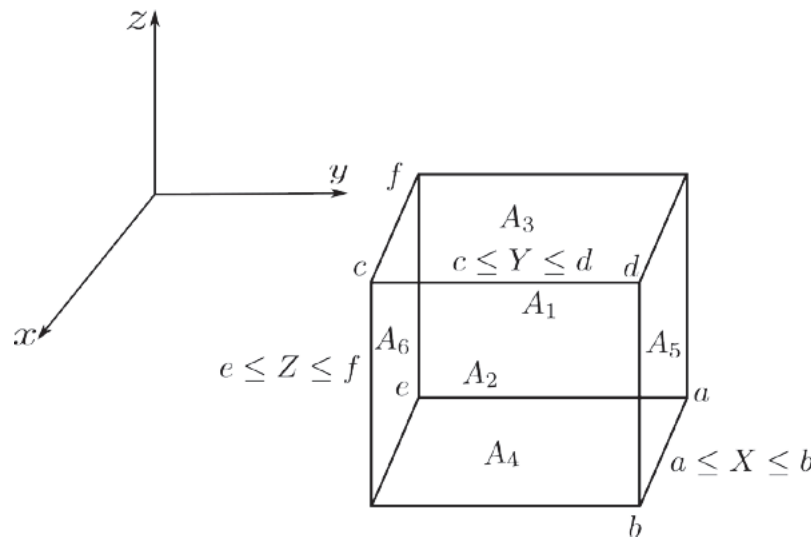


Figura 3.16 Áreas de flujo para el teorema de la divergencia

Tomando como referencia la coordenada x , se evaluarán las expresiones para el flujo que entra y sale del cubo a través de cada una de las caras. Para este caso, se considerarán las áreas A_1 y A_2 .

$$-\iint_{A_1} \vec{F} \cdot \hat{n} da + \iint_{A_2} \vec{F} \cdot \hat{n} da = \iiint_{A_2} \vec{F}(b, y, z) dy dz - \iint_{A_1} \vec{F}(a, y, z) dy dz \quad (3.114)$$

Del teorema fundamental del cálculo, se tiene lo siguiente:

$$\int_a^b \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx = F(\vec{b}) - F(\vec{a}) \tag{3.115}$$

Por lo tanto, es factible reescribir la expresión 3.114, esta vez teniendo en cuenta los límites de integración.

$$\int_e^f \int_c^d (\vec{F}(b,y,z) - \vec{F}(a,y,z)) dydz = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx dy dz = \int_e^f \int_c^d \int_a^b \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dV \tag{3.116}$$

Repitiendo el proceso para cada una de las caras del cubo, es decir, para Z y Y , y sumando cada una de estas contribuciones, junto con la definición de divergencia, la ecuación 3.116 tomaría la siguiente forma:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV \tag{3.117}$$

Por lo anterior se puede concluir lo planteado inicialmente en 3.113.

Ejemplo

Determine el flujo a través de una esfera centrada en el origen de radio R producido por un campo $\vec{F} = xz\hat{e}_x + \text{arcsec}(z^4 + 1)x^x\hat{e}_y + 3z\hat{e}_z$.

Se sabe que el flujo está dado por $\iint_A \vec{F} \cdot \hat{n} da$, por lo tanto, la manera correcta de resolver este problema es a través del teorema de la divergencia. La razón es la complejidad que puede implicar evaluar la integral en torno a la coordenada Y , por lo cual el procedimiento apropiado consiste en calcular la divergencia de \vec{F} y proceder a integrar sobre todo el volumen de la esfera, es decir:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_z}{\partial z} = z + 0 + 3 = z + 3 \tag{3.118}$$

Aplicando el teorema de la divergencia y tomando el diferencial de volumen en coordenadas esféricas, según 3.89, se tiene lo siguiente:

$$\iiint (z+3) dV = \iiint (z+3) r^2 \text{sen}(\theta) dr d\theta d\phi \tag{3.119}$$

Transformando z a coordenadas esféricas:

$$z = r \cos(\theta) \tag{3.120}$$

Sustituyendo en 3.119 y tomando los límites de integración de acuerdo con el dominio de cada una de las variables en coordenadas esféricas, se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (r \cos(\theta) + 3)r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin(\theta) \cos(\theta) dr d\theta d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R 3r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \tag{3.121}$$

Donde la primera integral es 0, ya que se trata de una integral de una función periódica evaluada en su periodo, dejando lo siguiente:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R 3r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi = 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^R r^2 dr = \boxed{4\pi R^3} \tag{3.122}$$

3.2.3 Rotacional

El rotacional (curl) se define como la medida de la torsión de un campo vectorial \vec{F} . En otras palabras, para cada punto en \vec{F} es posible determinar tanto el eje como la magnitud de la máxima circulación posible. Por ejemplo, un vórtice, como el ilustrado en la figura 3.17, puede describirse mediante el cálculo del rotacional, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{curl}(\vec{F})$. Este cálculo genera un vector cuya magnitud representa la velocidad angular del vórtice, mientras que su dirección indica el eje y el sentido de rotación del mismo.

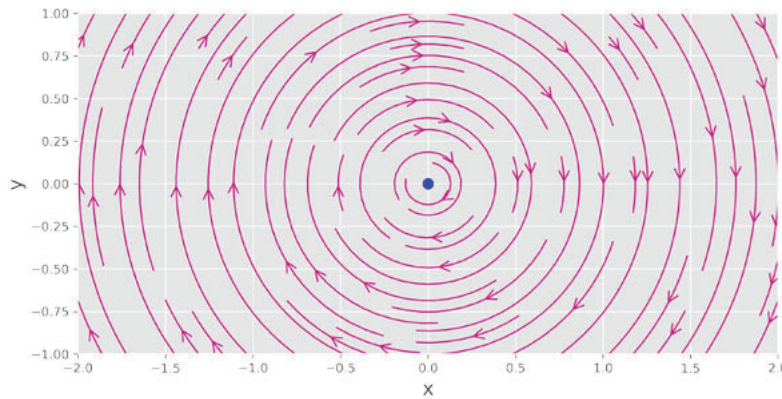


Figura 3.17 Vorticidad en torno a un eje coordenado

Para calcular el rotacional en coordenadas cartesianas es necesaria la siguiente definición en forma de determinante.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{e}_x - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{e}_z \tag{3.123}$$

Aplicando la definición previamente introducida del pseudo-tensor de Levi-Civita, es posible expresar este operador de manera más compacta. Esto se escribe como:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})^i = \epsilon_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(x,y,z) = \epsilon_{ijk} \vec{\nabla}^j F^k \quad (3.124)$$

con $(x,y,z) = (x_1,x_2,x_3)$

Ejemplo

Sea $\vec{F} = \cos(x+y)\hat{e}_x + \text{sen}(z)\hat{e}_y + (z+y)^2\hat{e}_z$, determine $\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})^1 = \epsilon_{123} \vec{\nabla}^2 F^3 + \epsilon_{132} \vec{\nabla}^3 F^2 = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (3.125)$$

Con $\epsilon_{123} = +1$ y $\epsilon_{132} = -1$ y reemplazando en 3.125, el rotacional para su primera componente en la dirección de \hat{e}_x quedaría:

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = (2(z+y) - \cos(z))\hat{e}_x \quad (3.126)$$

Los demás términos se expresan de la siguiente manera (se recomienda realizar la comprobación):

$$\epsilon_{213} \vec{\nabla}^1 F^3 + \epsilon_{231} \vec{\nabla}^3 F^1 = 0 \quad (3.127)$$

$$\epsilon_{312} \vec{\nabla}^1 F^2 + \epsilon_{321} \vec{\nabla}^2 F^1 = \text{sen}(x+y) \quad (3.128)$$

∴

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (2(x+y) - \cos(z))\hat{e}_x + 0\hat{e}_y + \text{sen}(x+y)\hat{e}_z \quad (3.129)$$

Propiedades del Rotacional

Sean \vec{F} y \vec{V} una par de campos vectoriales en \mathbb{R}^3 , (es igualmente valido en sistemas coordenados curvos). Entonces se tiene que:

Rotacional del producto cruz

$$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{V}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} \quad (3.130)$$

Rotacional de un rotacional

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \tag{3.131}$$

Como se puede observar, esta última propiedad es un corolario de la primera identidad presentada. Dada su relevancia en el estudio del electromagnetismo, se solicitará su demostración en la sección de problemas. De hecho, es tan fundamental que da origen a otro operador vectorial que se abordará más adelante: el Laplaciano (∇^2).

Rotacional del gradiente de un campo escalar

Sea ϕ un campo escalar, se dice entonces que el gradiente de ϕ , es irrotacional, es decir:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \tag{3.132}$$

Rotacional del producto entre un campo vectorial y escalar

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi \vec{F}) = \vec{\nabla} \phi \times \vec{F} + \phi \vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{3.133}$$

Rotacional en otros sistemas de coordenadas

Como se ha presentado hasta este punto, es necesario mostrar la forma que adopta el rotacional en los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas. Esto resulta especialmente útil al resolver problemas complejos, ya que con frecuencia se simplifican al trasladarlos a un sistema de coordenadas más acorde con su simetría.

Coordenadas cilíndricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \hat{e}_\rho & \rho \hat{e}_\phi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\phi & F_z \end{bmatrix} \tag{3.134}$$

Coordenadas esféricas

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{bmatrix} \hat{e}_r & r \hat{e}_\theta & r \sin(\theta) \hat{e}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin(\theta) F_\phi \end{bmatrix} \tag{3.135}$$

3.2.4 Laplaciano-D'Alembertiano

El operador laplaciano, simbolizado por Δ , ∇^2 o simplemente $\nabla \cdot \nabla F$, donde F es una función definida en \mathbb{R}^n y cuya segunda derivada existe, es una herramienta matemática de vital importancia en el campo de la física. En particular, permite definir y modelar fenómenos como la difusión o el potencial eléctrico, por lo que su estudio resulta fundamental en este contexto.

Para cada uno de los sistemas coordenados presentados, su definición matemática en \mathbb{R}^3 es la siguiente:

Cartesianas

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.136}$$

Esféricas

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{3.137}$$

Cilíndricas

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{3.138}$$

Cuando se trata de sistemas asociados a geometrías no euclidianas, es decir, geometrías curvas, el operador adopta una forma diferente. Un caso muy conocido es cuando abordamos problemas en un espacio de Minkowski, especialmente relevante por sus implicaciones en el desarrollo de la teoría de la relatividad. En este espacio, tanto las coordenadas espaciales (x, y, z) como el tiempo se combinan para generar una variedad en la que todos los cuerpos en movimiento presentan un comportamiento similar entre dos intervalos espacio-temporales para cualquier observador en reposo. Esta variedad tiene la característica de que, cuando se está lo suficientemente cerca, parece un espacio euclídeo [5, 6]. Esta introducción permite presentar un operador derivado del Laplaciano en este singular espacio.

D'Alembertiano

Básicamente es el mismo operador ya mencionado, pero incluye la coordenada temporal, lo que permite generalizar el laplaciano.

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{3.139}$$

Ejemplo

Sea $\psi = A \cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)$. Calcular $(\square + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi$. A esta última expresión se le conoce como la ecuación de Klein-Gordon, la cual fue de gran utilidad en la descripción del bosón de Higgs, trabajo por el cual Peter Higgs y François Englert recibieron el Premio Nobel de Física en 2013 [7, 8].

La mejor forma de proceder es calcular los términos de forma independiente y posteriormente sumarlos empezando por $\square\psi$.

$$\square\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi \quad (3.140)$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi) \quad (3.141)$$

Asimismo,

$$\begin{aligned} \nabla^2\psi = & -(A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2x.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) - \\ & (A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2y.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) - \\ & (A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2z.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) \end{aligned} \quad (3.142)$$

Aquí se aplicó la definición de la segunda derivada a cada término, con el fin de agruparlos posteriormente.

Finalmente, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\square + (\frac{mc}{\hbar})^2)\psi = & \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \nabla^2\psi = \\ & -A\omega^2 \cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi) + \\ & (A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2x.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) + \\ & (A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2y.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) + \\ & (A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi))(2z.\vec{k})^2 + A\text{sen}(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi)(2\vec{k}) + \\ & ((\frac{mc}{\hbar})^2)A\cos(\omega t + \vec{k}(x^2 + y^2 + z^2) + \phi) \end{aligned} \quad (3.143)$$

Hasta este punto se han expuesto los conceptos matemáticos más relevantes y necesarios para el estudio del electromagnetismo y las ondas, sin entrar en detalles exhaustivos. Esta decisión obedece

a que, pese al carácter matemático de este capítulo, la intención de este texto es enfocarse en la fenomenología física.

3.2.5 Gráficos y cálculos en Python

Esta sección está dedicada al manejo e instalación de algunas librerías fundamentales de Python para la graficación de datos, en particular: `numpy`, `matplotlib` y `sympy`. En caso de ser necesario, se introducirán otras librerías complementarias, como `pandas` o `SciTools`.

Para ejecutar los scripts presentados en esta sección, es necesario descargar el entorno de desarrollo Anaconda desde el siguiente enlace:

<https://www.anaconda.com/products/individual#windows>

Hecho esto se procede a abrir el prompt de Anaconda.

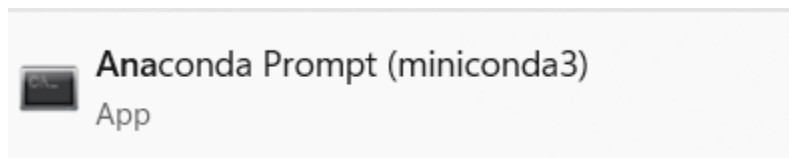


Figura 3.18 Prompt de Anaconda (Python)

Una vez allí, se debe escribir el siguiente comando, el cual permitirá obtener la última versión de Conda, un administrador de librerías de Python que evita el uso de variables de entorno y reduce el riesgo de fallos en el sistema.

```
conda update -n base -c defaults conda\\
```

Posteriormente creamos el entorno de Python donde almacenaremos nuestras librerías, para este caso, se le nombrara entorno-prueba.

```
conda create -n entorno-prueba python=3.7 numpy pandas matplotlib sympy jupyter
```

Esto permitirá instalar las librerías mencionadas anteriormente, así como un entorno de desarrollo integrado al navegador llamado Jupyter Notebook.

Una vez completado este paso, se procederá a activar el entorno creado escribiendo la siguiente línea de comando:

```
conda activate entorno-prueba
```

Se activara al lado izquierdo del prompt el nombre del entorno.

```
(entorno-prueba) C:\Users\User>
```

Para posteriormente activar el entorno gráfico.

```
jupyter notebook
```

El cual abrirá de forma automática el navegador mostrando lo siguiente en pantalla (De no abrirse, copiar y pegar los links que se muestran en el prompt de Anaconda):

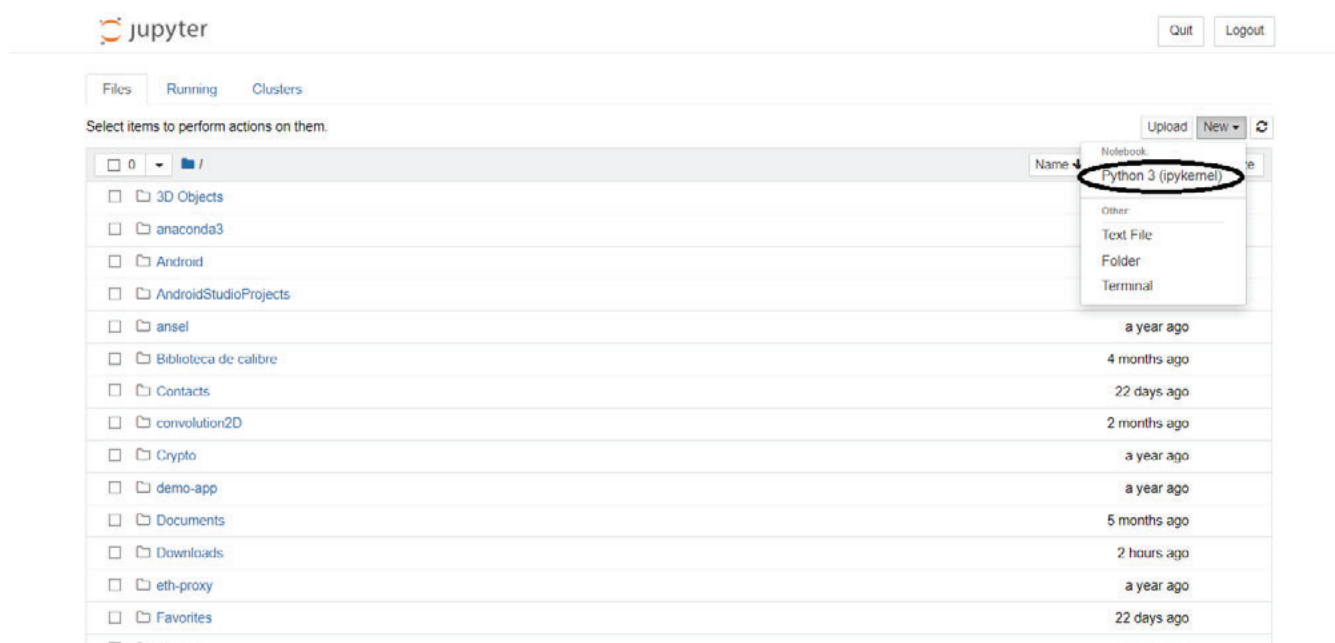


Figura 3.19 Menú de configuración de Jupyter Notebook

Se hace clic en la zona indicada, lo que abrirá un nuevo cuaderno en el cual será posible ejecutar los scripts presentados a continuación.

El primer ejemplo ilustra cómo graficar un campo vectorial en 2D, similar a los mostrados en las secciones anteriores. Al introducir el siguiente código en la línea de comandos del cuaderno, se obtiene la figura: 3.20.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 %matplotlib inline
5 #Grafico vectorial de la funcion F(x,y)= sin(x)ex + cos (y)ey
6 # Dominio de x,y desde -5 hasta 5 tomando 10 pts
7 x,y = np.meshgrid(np.linspace(-5,5,10),np.linspace(-5,5,10))
8
9 u = np.sin(x)
10 v = np.cos(y)
11
```

```
12 plt.quiver(x,y,u,v) #Grafico de la funcion parametrica
13 plt.show()
```

Código 3.1 Gráfico de un campo vectorial en Python

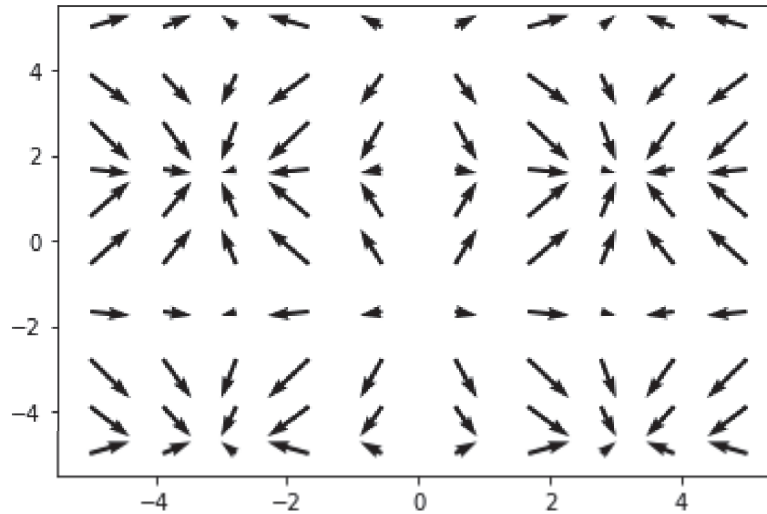


Figura 3.20 Campo vectorial de la función paramétrica dada por $U = \text{sen}(x)$ $V = \text{cos}(y)$

También es importante destacar que no todos los scripts presentados aquí están exclusivamente orientados a la visualización de expresiones matemáticas; algunos de ellos permiten realizar cálculos de manera ágil, aprovechando las funcionalidades de las librerías numpy y sympy. Esto resulta especialmente útil cuando el objetivo trasciende el aprendizaje conceptual y se requiere efectuar operaciones de forma eficiente. En ese contexto, el siguiente algoritmo permite determinar el producto cruz de dos vectores.

```
1 import numpy as np
2
3 #Entrada de vectores
4 A = np.array([1, 1, 1])
5 B = np.array([1, 1, 1])
6
7 #Calcular producto Cruz
8 output = np.cross(A, B)
9
10 print(output)
```

Código 3.2 Cálculo del producto cruz con numpy

En otras ocasiones, resulta útil poder calcular de forma analítica ciertas expresiones matemáticas, como en el caso del cálculo de la matriz inversa en la transformación de coordenadas rectangulares a cilíndricas (ver ecuación 3.62). Por ello, el uso de la librería sympy es ideal para esta tarea, como se mostrará en la siguiente rutina:

```
1 !pip install -U sympy #libreria para calculos simbolicos de Python
```

```

2 import sympy as sym
3
4 #Imprime en pantalla las ecuaciones
5 sym.init_printing()
6
7 #Toma la variable phi como simbolica
8 ph = sym.symbols('phi')
9
10 # forma de introducir una matriz por fila
11 matrix = sym.Matrix([[sym.cos(ph), sym.sin(ph), 0],
12                      [-sym.sin(ph), sym.cos(ph), 0],
13                      [0, 0, 1]])
14 #Imprime usando notacion de latex
15 print(sym.latex(sym.simplify(matrix.inv())))
16 #imprime en pantalla la solucion
17 sym.pprint(sym.simplify(cilindricas(cyl)))

```

Código 3.3 Cálculo de la matriz inversa usando la librería de matemáticas simbólicas de Python

Arrojando como resultado el código $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ que permite escribir expresiones matemáticas complejas, como las presentadas en este documento, y adicionalmente su solución de una manera amigable para el usuario.

El siguiente código representa una versión más elegante del anterior, lograda mediante la definición de una función para introducir la matriz de transformación.

```

1 import numpy as np
2 import sympy as sym
3
4 sym.init_printing()#Print the equations
5 #Takes variables as symbols
6 ph,th,r,ro,x,y,z=sym.symbols(['phi','theta','r','rho','x','y','z'])
7 cyl = sym.Matrix([[x**2],[x**2+z**2],[0]])
8
9 def cilindricas(cyl):
10 # Syntax to introduce matrixes
11     matrix = sym.Matrix([[sym.cos(ph), sym.sin(ph), 0],
12                          [-sym.sin(ph), sym.cos(ph), 0],
13                          [0, 0, 1]])*cyl
14     return matrix
15
16 sym.pprint(sym.simplify(cilindricas(cyl)))
17
18
19 vars = {"x":0, "y":2, "z":1}
20 newCyl = cilindricas(cyl).subs(vars)
21 sym.pprint(newCyl)

```

Código 3.4 Cambio de coordenadas (rectangulares-cilíndricas) usando la librería sympy

Otra posibilidad es el cálculo de integrales. Si bien es cierto que esta librería posee algunas limitaciones, para la mayoría de las integrales simples que suelen aparecer en problemas de textos de ingeniería no presenta inconvenientes. Como ejercicio, se deja el tratar de resolver la integral presentada en la sección de ángulo sólido por este método.

En este ejemplo, se tratará de resolver la siguiente integral definida:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^3} \quad (3.144)$$

```
1
2 import sympy as sym
3
4 #Imprime ecuaciones
5 sym.init_printing()
6
7
8 #variables simbolicas
9 x, y, a = sym.symbols(['x', 'y', 'a'])
10
11 #Calcula la integral definida
12 z = sym.integrate(1/((sym.sqrt(x**2+y**2))**3), (x, -sym.oo, sym.oo))
13
14 sym.pprint(sym.simplify(z))
```

Código 3.5 Cálculo de una integral indefinida con sympy

En el caso de las ecuaciones diferenciales, también es posible utilizar la librería sympy. En este ejemplo, se combinará con numpy y matplotlib para resolver el siguiente problema.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x \quad (3.145)$$

Con condiciones iniciales $y(1) = 0$.

Su solución analítica es la que sigue.

$$y = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3x} \quad (3.146)$$

Se puede comparar esta solución con la obtenida mediante sympy, utilizando el siguiente código.

```
1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import sympy
5
6
7 #Definir variables
8 x, y, z, t = symbols('x y z t')
9 k, m, n = symbols('k m n', integer=True)
10 f, g, h = symbols('f g h', cls=Function)
11
12
13 #dy/dx = (x-1/xy)
14
```

```
15 eq = Eq(f(t).diff(t), (t)-(1/t)*f(t))
16 an_sol = dsolve(eq, hint='1st_linear', ics={f(1): 0})
17 print('ODE class: ', classify_ode(eq)[0])
18 pprint(an_sol)
19
20 t_begin=1.
21 t_end=5.
22 t_nsamples=100
23 t_space = np.linspace(t_begin, t_end, t_nsamples)
24
25 lmbd_sol = lambdify(t, an_sol.rhs)
26 x_an_sol = lmbd_sol(t_space)
27
28 lmbd_handsol = lambda t : (t**2/3)-(1/(3*t))
29 x_hand_sol = lmbd_handsol(t_space)
30
31 plt.figure()
32 plt.plot(t_space, x_hand_sol, '--', linewidth=2, label='a mano')
33 plt.plot(t_space, x_an_sol, linewidth=1, label='sympy')
34 plt.title('EDO de orden 1')
35 plt.xlabel('t')
36 plt.ylabel('f(t)')
37 plt.grid()
38 plt.legend()
39 plt.show()
```

Código 3.6 Solución de un ecuación diferencial ordinaria de orden 1 mediante sympy. basicstyle

El resultado de la ejecución del script arroja el resultado de la figura 3.21.

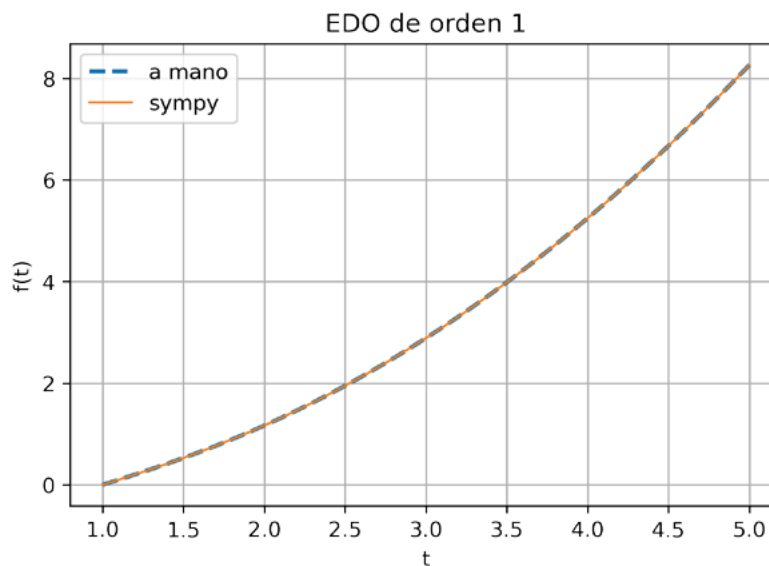


Figura 3.21 Comparación de la solución de sympy con una analítica

Como se observa, la solución numérica proporcionada por sympy coincide exactamente con la solución analítica de la ecuación diferencial planteada.

El siguiente código permite generar gráficos en 3D, una herramienta poderosa al abordar sistemas más realistas. A pesar de su utilidad, estos gráficos suelen ser complejos de interpretar, por lo que en la literatura científica es más común encontrar representaciones mediante mapas de calor.

```

1
2 from mpl_toolkits import mplot3d
3
4 %matplotlib inline #Permite visualizar en consola
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 fig = plt.figure()
9 ax = plt.axes(projection='3d') #prepara para recibir datos en 3d
10
11
12 #Definimos la funcion a graficar
13 def f(x, y):
14     return np.cos(y)*x**2+np.sin(x)*y**2
15 x = np.linspace(-6, 6, 300)
16 y = np.linspace(-6, 6, 300)
17
18 X, Y = np.meshgrid(x, y)
19 Z = f(X, Y)
20
21 fig = plt.figure()
22 ax = plt.axes(projection='3d')
23 ax.contour3D(X, Y, Z, 50, cmap='binary')
24 ax.set_xlabel('x')
25 ax.set_ylabel('y')
26 ax.set_zlabel('z');
27
28
29
30 ax = plt.axes(projection='3d')
31 ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1,
32                cmap='magma', edgecolor='none')
33 ax.set_title('surface');
34 ax.view_init(60, 33) #Cambia angulo de visualizacion
35 fig

```

Código 3.7 Código para graficar una función en 3D

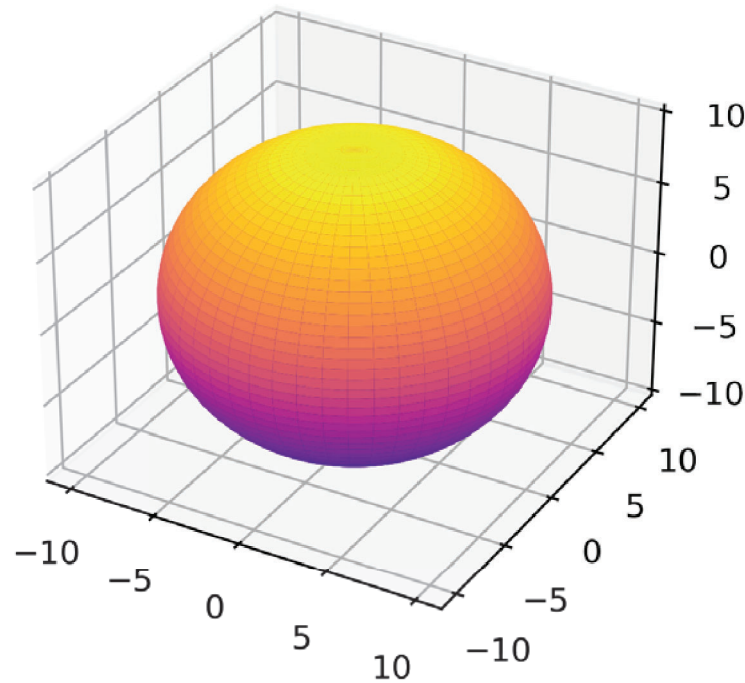


Figura 3.22 Ejemplo de un gráfico en 3D usando la librería matplotlib

Finalmente, el siguiente código permite graficar precisamente los mapas de calor mencionados anteriormente.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.ticker as ticker
4
5 X = np.random.uniform(-2, 2, 200)
6 Y = np.random.uniform(-2, 2, 200)
7 Z = (2*X*np.cos(Y) + Y**2*np.cos(X))+(np.sin(X)*2*Y-np.sin(Y)*X**2)
8
9 contour = plt.tricontourf(X, Y, Z, 100, cmap="bwr")
10
11 def fmt(x, pos):
12     a, b = '{:.2e}'.format(x).split('e')
13     b = int(b)
14     return r'${} \times 10^{{{}}}$'.format(a, b)
15 plt.rcParams['figure.dpi'] = 300
16 cbar = plt.colorbar(contour, format=ticker.FuncFormatter(fmt))
17 cbar.set_label('Intensidades')
18 plt.xlabel('X')
19 plt.ylabel('Y')
20
21 plt.show()
```

Código 3.8 Mapa de calor de una función en 3D

Entregando el siguiente resultado.

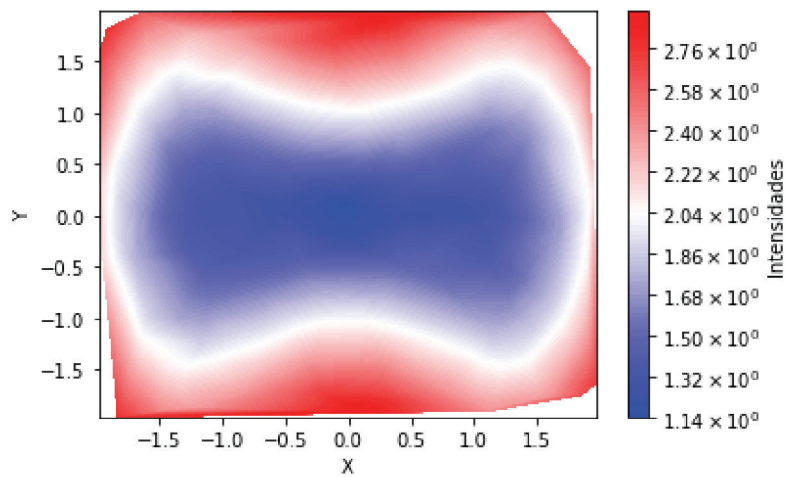


Figura 3.23 Mapa de calor de la función $Z = \cos^2(x) + \sqrt{x^2 + y^2}$

3.3 Problemas

- Sea $\vec{F} = \cos(x+y)\hat{e}_x + \sin^2(x+y+z)\hat{e}_y + \sqrt{x^2+z^2}\hat{e}_z$, para un punto $I(2,2,1)$, determine lo siguiente:
 - \vec{F} en I en coordenadas cilíndricas.
 - \vec{F} en I en coordenadas esféricas.
 - El rotacional, la divergencia y el laplaciano de \vec{F} .
- Calcule el ángulo sólido subtendido por los extremos de un disco de radio R a una distancia H de un observador, el cual está dado por la siguiente expresión:

$$\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{Hrdrd\phi}{(H^2+r^2)^{3/2}}. \quad (3.147)$$

- Resuelva esta integral de forma analítica y usando sympy, grafique el resultado en 3D.
 - Describa la situación planteada con un esquema (dibujo) teniendo en cuenta los ángulos.
 - Resuelva el mismo problema, pero esta vez para un anillo de las mismas dimensiones.
- La siguiente ecuación diferencial describe un circuito cerrado con una resistencia y un inductor en serie. Determine su solución de forma analítica y usando sympy, grafique el resultado y compare.

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{A}{L} \sin(\omega t). \quad (3.148)$$

Nota: Utilice los valores de la figura 3.24.

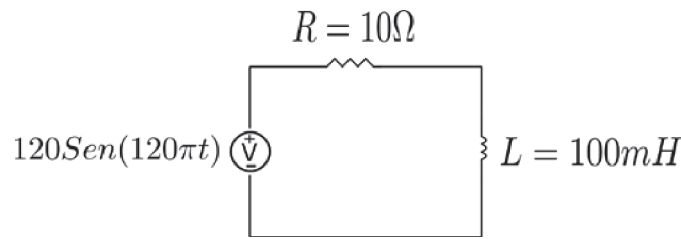


Figura 3.24 Circuito RL en régimen de AC

4. Determine el vector de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$ entre los vectores $\vec{E} = E_m \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{y}) \hat{e}_z$ y $\vec{B} = \frac{E_m}{c} \sin(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{y}) \hat{e}_x$.
 - a) Determine la magnitud de \vec{S} y su dirección de propagación (emplee la definición que utiliza el símbolo de Levi-Civita).
5. Encuentre una expresión para la fuerza de Lorentz que involucre la dirección (ver figura), si una carga Q de masa m se desplaza a una velocidad $\vec{v} = A \cos(\omega t + \phi) \hat{e}_z$, en presencia de un campo magnético $\vec{B} = B_m e^{\omega t + \phi} \hat{e}_y$. Encuentre para qué valores de $(\omega t + \phi)$ la amplitud del campo magnético toma la siguiente forma: $B_m = -\frac{A\omega m}{Q}$ (recuerde que $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$, sugerencia: expanda los dos primeros términos de la expresión resultante en series de Taylor).

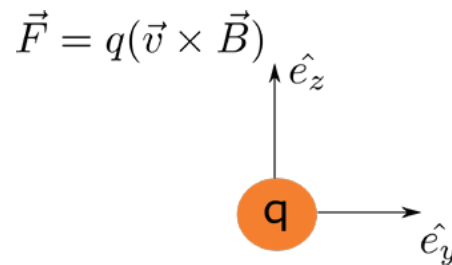


Figura 3.25 Esquema del problema que involucra componentes de la fuerza de Lorentz

6. Determine el campo eléctrico producido por la parábola dirigida hacia el foco F , como se indica en la figura 3.26, si se tiene que su vértice está en el origen. La ecuación general de una parábola está dada por $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ con $x = p - h$, vértice $V(h, k)$, foco $F(h + p, k)$.

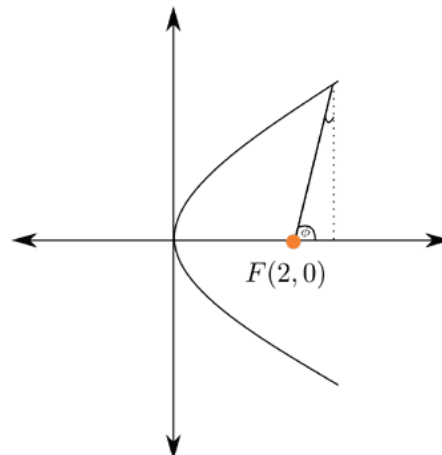
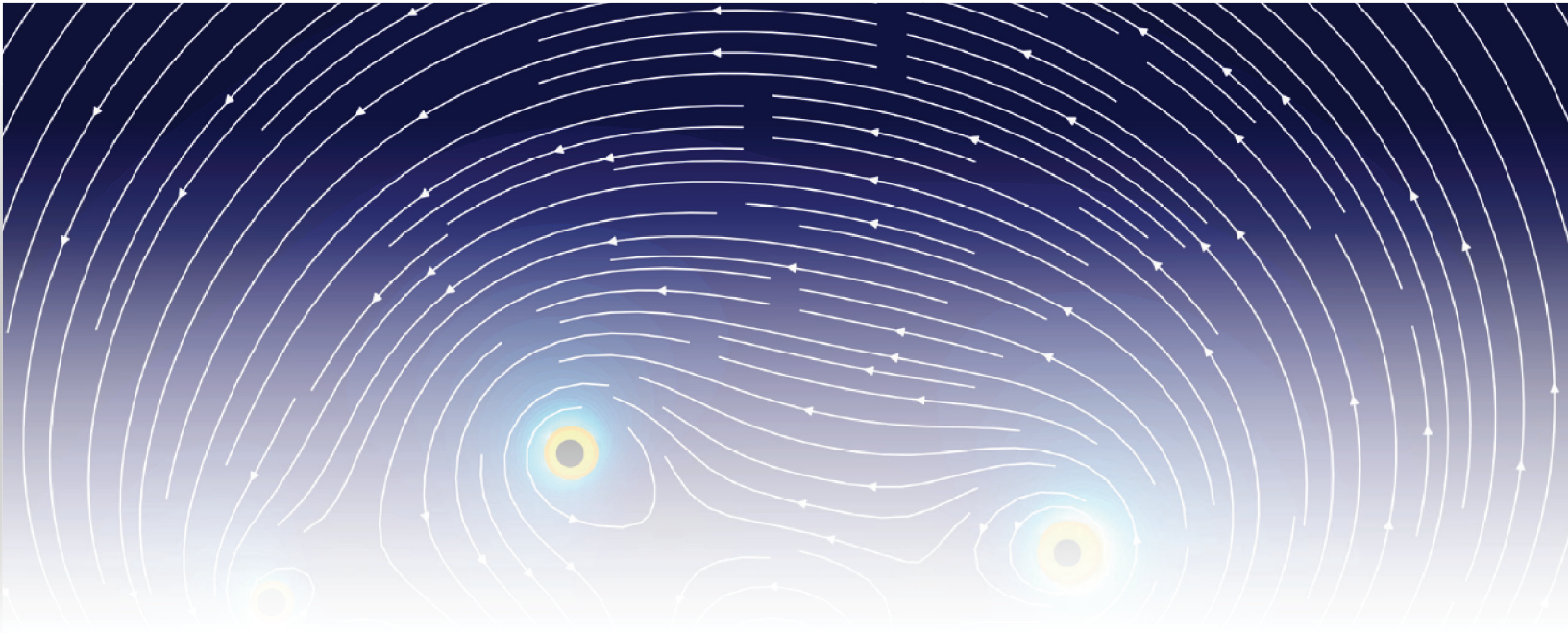


Figura 3.26 Cálculo del campo eléctrico de una parábola



4. Campos escalares y vectoriales

4.1 Principios básicos de campos

En esta sección, el enfoque estará centrado en el estudio de los campos escalares y vectoriales, con énfasis en los asociados a las cargas eléctricas y sus efectos (leyes de Maxwell). Sin embargo, es interesante explorar otros fenómenos físicos asociados a estos conceptos, en particular, mediante la exploración de los campos gravitacionales. De esta manera, se podrá tener un concepto más amplio e intuitivo de los mismos.¹

4.1.1 Campo escalar

Los campos escalares se caracterizan por tener un valor numérico definido en cada región del espacio que describen, es decir, para cada punto existe un valor real al cual están asociadas unidades de medida que determinan su naturaleza. Por ejemplo, el campo de temperaturas que caracteriza una habitación permite relacionar la temperatura con un conjunto de coordenadas, las cuales son independientes del observador. Esto quiere decir que, si dos personas diferentes miden el mismo punto, independientemente del sistema de coordenadas que empleen, deberán obtener la misma lectura del valor de la temperatura. Un ejemplo de la visualización de un campo escalar se puede apreciar en la figura 4.1, donde los valores están dados por la evaluación de la función allí indicada, y permanecen invariantes sin importar el sistema de coordenadas elegido.

Generalmente, los campos escalares pueden representarse mediante mapas de calor, acompañados de una barra lateral que indica el valor numérico de los colores empleados. De esta manera, se puede representar una figura en 3D en 2D. Otros ejemplos de este tipo de campos incluyen la presión, el potencial eléctrico, la densidad, entre otros.

Una propiedad matemática importante de este tipo de estructuras es la siguiente:

¹Imagen de J.C Maxwell, tomada de: <https://library.si.edu/image-gallery/73659> ©

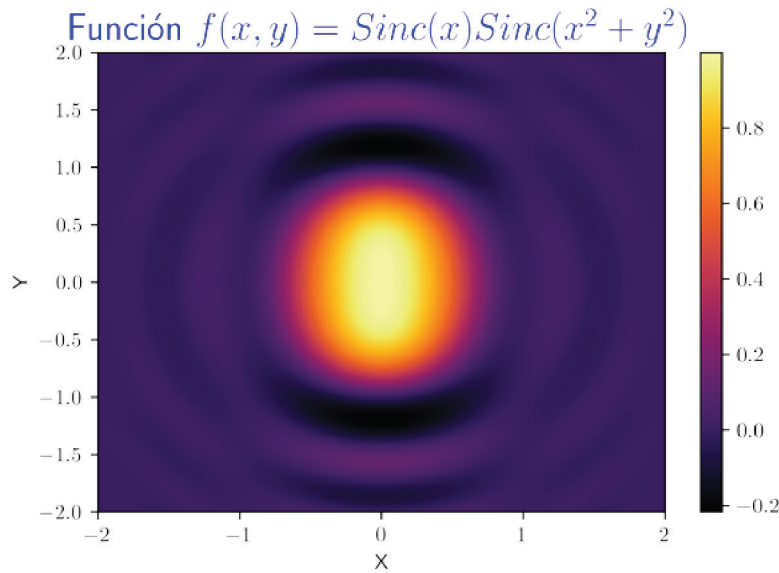


Figura 4.1 Campo escalar formado por la función $f(x, y) = \text{Sinc}(x)\text{Sinc}(x^2 + y^2)$

Sea ϕ un campo escalar arbitrario, entonces:

$$\nabla\phi = \vec{E} \tag{4.1}$$

Es decir, el gradiente de un campo escalar es un campo vectorial.

```

1
2 import numpy as np
3 from matplotlib import pyplot as plt
4
5 n = 2080 #numero de puntos entre limites
6 x = np.linspace(-2., 2., n) #Rango de X
7 y = np.linspace(-2., 2., n) #Rango de Y
8 X, Y = np.meshgrid(x, y) #Produce una malla (matriz) de datos
9
10 Z = np.sinc(X) * np.sinc(X ** 2 + Y ** 2) #Define la funcion
11 plt.rcParams['figure.dpi'] = 900 #Resolucion
12 plt.rcParams['text.usetex'] = True #Habilitacion de latex
13
14 plt.pcolormesh(X, Y, Z, cmap = cm.inferno)
15 plt.title('Funcion $f(x,y)=\text{Sinc}(x)\text{Sinc}(x^2+y^2)$', fontsize=18, color='b')
16 cbar = plt.colorbar()
17 plt.xlabel('X')
18 plt.ylabel('Y')
19 plt.show()

```

Código 4.1 Campo escalar producido por la función sinc(x)

4.1.2 Campo vectorial

Los campos vectoriales, desde el punto de vista de la física, son herramientas conceptuales que permiten modelar propiedades de la naturaleza, tales como el campo eléctrico, la velocidad, la

fuerza, el momento, etc. Es decir, todo aquello que, para poder describirse, requiere tanto magnitud como dirección. Un ejemplo típico de este tipo de estructuras matemáticas aplicadas al campo de la física es la diagramación del campo de velocidades en un fluido, cuyo caso más simple es el transporte de cantidad de movimiento asociado a una velocidad en la capa más externa de una cavidad abierta. En otras palabras, se trata de un recipiente que contiene un fluido y cuya parte superior está abierta. Dicha solución del campo de velocidades puede apreciarse en la figura 4.2.

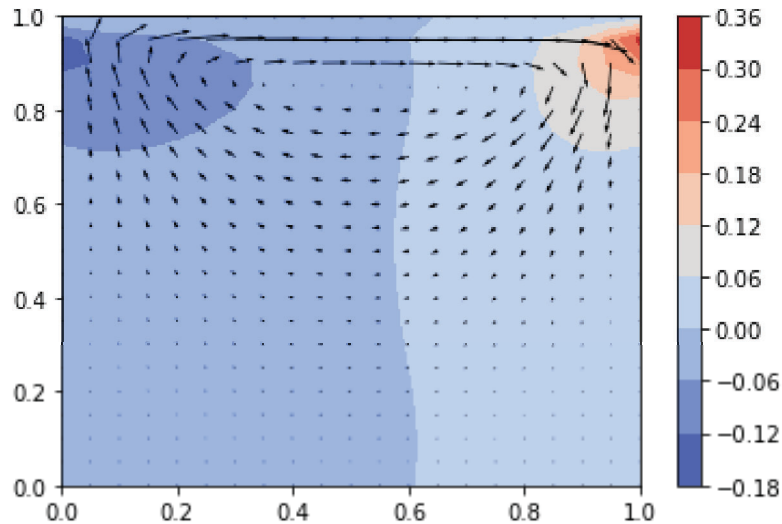


Figura 4.2 Campo vectorial asociado a una cavidad abierta en la parte superior

Los ejes X y Y representan, respectivamente, la longitud horizontal y vertical de la cavidad, mientras que la magnitud de las flechas indica la velocidad en la posición dada. Este enfoque para caracterizar campos vectoriales es especialmente útil en el estudio del electromagnetismo. Sin embargo, a diferencia de las velocidades en un fluido, cuya comprensión puede resultar más intuitiva, la interpretación de los campos magnético y eléctrico es menos evidente, ya que su visualización en la realidad depende de fenómenos acoplados. Por ejemplo, las líneas de campo magnético pueden revelarse al colocar virutas de hierro alrededor de un imán. Por esta razón, el uso de herramientas computacionales es fundamental para observar y analizar estos conceptos físicos.

4.2 Campo eléctrico y fuerza de Coulomb

El campo eléctrico y la fuerza de Coulomb son dos ejemplos de campos vectoriales. Como es habitual, el estudiante está más familiarizado con el concepto de fuerza, entendida como la acción o interacción entre objetos. De esta forma, es fácil conceptualizar la fuerza como el vector resultante de dicha interacción, comúnmente conocida como la ley de acción y reacción. En este contexto, la fuerza eléctrica o de Coulomb sigue el mismo principio, aunque en este caso, la fuerza es provocada por cargas eléctricas.

Este fenómeno se pone de manifiesto en el famoso experimento en el que se frota un peine de plástico sobre el cabello y se atraen pedazos de papel. Sin embargo, hay una sutil diferencia: en

este caso, la acción (atracción) ocurre a distancia. Este detalle fascinó a los científicos de los siglos XVIII y XIX, como Joseph Louis de Lagrange (1773), quien intentó modelar por primera vez la atracción de objetos elipsoidales a distancia [9], o Carl Friedrich Gauss (1835), quien dio nombre a un par de leyes del electromagnetismo [10]. Sin embargo, el principal impulsor de la integración de todo este conocimiento, que permitió un verdadero avance en la comprensión de este fenómeno, fue el escocés James Clerk Maxwell, con su obra cumbre “A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field” (1865) [11]. Cabe destacar que, aunque muchos otros grandes nombres contribuyeron al estudio del electromagnetismo, la magnitud de este campo hace imposible nombrarlos a todos.

Entrando de lleno en el tema, ¿qué es entonces la fuerza de Coulomb? En esencia, se trata de una interacción entre cargas o distribuciones de carga que, dependiendo de su naturaleza, pueden ser atractivas o repulsivas. El primer caso ocurre cuando las cargas son de polaridad opuesta, es decir, una carga es negativa y la otra positiva. Es posible que este concepto no sea del todo claro, por lo que es necesario definir lo que es una carga eléctrica. En este caso, tomaremos como base el electrón, cuya carga eléctrica es por definición negativa y tiene un valor de $e^- = 1,60217663 \times 10^{-19}$ C, donde C es la unidad del sistema internacional de medición llamada Coulomb², la cual equivale a la cantidad de carga entregada por 1 amperio en 1 segundo, o a $6,241509 \times 10^{18}$ cargas elementales e^- , donde la carga elemental es la carga del electrón. Ahora bien, una carga repulsiva se presenta cuando las cargas son iguales, es decir, cuando ambos sistemas tienen la misma polaridad o signo. Lo anterior no es más que una simplificación del concepto real de carga eléctrica, ya que, cuando hablamos de atracción y repulsión debemos considerar la composición química del objeto analizado. Por ejemplo, cuando una molécula pierde un electrón y se ioniza, adquiere una carga parcial positiva. Esto significa que, en comparación con la especie eléctricamente neutra, tiene un electrón menos, pero no implica que sea realmente de carga positiva. Sin embargo, en el caso del hidrógeno, esta sí es la situación, ya que al perder su único electrón, el núcleo del átomo queda expuesto, confiriéndole una carga positiva real debido al protón que allí se encuentra. Recordemos que los neutrones no tienen carga eléctrica.

Después de esta introducción y necesario preámbulo, se pueden definir las expresiones para la fuerza de Coulomb y el campo eléctrico. En términos simples, la fuerza eléctrica se define como la atracción o repulsión entre cargas, siendo su intensidad proporcional al valor de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

$$\vec{F} = K \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}|^2} \hat{e}_\rho \tag{4.2}$$

K se conoce como constante eléctrica o de Coulomb, donde:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \tag{4.3}$$

ϵ_0 se conoce como permitividad eléctrica del vacío.

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0} = 8,8541878128 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \tag{4.4}$$

²Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) fue un ingeniero y físico francés quien descubrió la ley que lleva su mismo nombre [12]

Donde c representa la velocidad de la luz en el vacío ($c = 299792458 \frac{m}{s}$) y μ_0 la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 1,25663706212 \times 10^{-6} \frac{N}{A^2}$)[13]. El significado de este último parámetro se abordará con mayor profundidad en la sección dedicada al electromagnetismo.

4.2.1 Teorema de la conservación de la carga

Este principio nos indica que, en sistemas cerrados o aislados, la carga total se conserva. Esto significa que la diferencia entre las cargas positivas y negativas permanece constante. Este hecho puede considerarse como un corolario del teorema de conservación de la energía o de la primera ley de la termodinámica [14, 15].

En términos matemáticos, este principio se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{\text{entra}} - \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)_{\text{sale}} \quad (4.5)$$

Esto significa que el cambio en la carga total de un volumen cualquiera se debe a la diferencia entre la carga que ingresa y la que sale de dicho sistema. Como se mencionó previamente, esta ecuación es análoga a la primera ley de la termodinámica, en la que la energía no se crea ni se destruye, sino que lo que se pierde es igual a lo que se gana, de manera similar a lo que ocurre con la carga eléctrica.

La primera persona en demostrar de manera inequívoca el teorema de conservación de la carga fue Michael Faraday en 1843. Recordemos que Faraday fue uno de los principales contribuyentes al desarrollo de la teoría electromagnética, siendo quizás su más famosa contribución la ley de inducción que lleva su nombre [16].

Ejemplo

Consideremos un sistema en el que entra carga con una velocidad dada por $q(t)$ y que sale a una tasa de 2 C/s. Se requiere encontrar una expresión que permita predecir el comportamiento de la carga en función del tiempo y graficarlo, resolviendo tanto de forma computacional como analítica.

Lo primero es emplear el teorema de conservación de la carga, para lo cual se utiliza la ecuación 4.5. Es decir:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = q(t) - 2 \quad (4.6)$$

Aquí, hemos reemplazado por lo que se menciona en el problema: 2 C/s es la carga que sale, y $q(t)$ es la carga que entra. Esto nos lleva a una ecuación diferencial lineal de primer orden, que puede resolverse con el método de separación de variables, si cambiamos la derivada parcial por una derivada total, ya que la carga solo depende del tiempo. Así obtenemos:

$$\frac{dq}{dt} = q(t) - 2 \quad (4.7)$$

A continuación, si separamos las variables e integramos ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\int \frac{dq}{q(t)-2} = \int dt \quad (4.8)$$

Por consiguiente,

$$\ln|q(t) - 2| = t + C \quad (4.9)$$

Organizando la expresión y despejando para $q(t)$ quedaría:

$$q(t) = Ke^t + 2 \quad (4.10)$$

Para encontrar la constante de integración K es necesario definir una condición inicial, en este caso, supondremos que en el instante cuando $t = 0$, la carga eléctrica en el sistema es de $1 \text{ C} \therefore K = -1$.

$$q(0) = 1 = Ke^0 + 2 \therefore K = -1 \quad (4.11)$$

$$q(t) = 2 - e^t \quad (4.12)$$

También es posible resolver este problema de forma computacional utilizando el siguiente código en Python. En él se plantea la ecuación diferencial, en este caso la ecuación 4.6, y se define el dominio temporal como $0 \leq t \leq 5$. Posteriormente, dicha ecuación se integra mediante la rutina `odeint`, para luego graficar los resultados, tal como se ha mostrado en secciones previas de este texto.

```

1
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.integrate import odeint
5
6 def q(q,t): # EQ Diferencial planteada
7     dqdt = q-2
8     return dqdt
9
10 q0 = [0, 1, 2] # condiciones iniciales q(0)= 0, 1, 2
11 t = np.linspace(0,5,100)# Dominio del tiempo
12 x = np.linspace(0,5,100)# Dominio solucion analitica
13 result = odeint(q,q0,t) # rutina de sln de la EDO
14
15 fig ,ax = plt.subplots()
16 ax.plot(t, result[:,0], label='q0 = 0')
17 ax.plot(t, result[:,1], 'k^', label='q0 = 1')
18 ax.plot(t, result[:,2], label='q0 = 2')
19 ax.plot(x, 2-np.exp(x), 'r-', label = 'Analitico con q0 = 1')
20 ax.legend(prop={'size': 12})
21 ax.set_xlabel('t')
22 ax.set_ylabel(r'q(t)')
23 ax.grid()

```

Código 4.2 Código para resolver el problema del ejemplo

De lo anterior, se obtiene la siguiente figura 4.3.

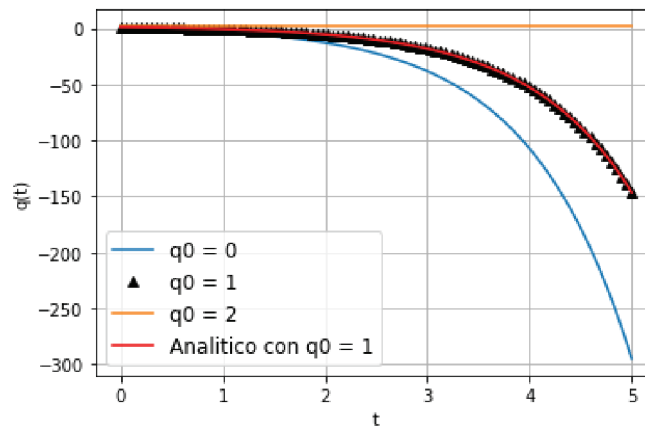


Figura 4.3 Solución de la evolución de la carga en el tiempo, tanto analítica como numérica

Como se puede apreciar, el resultado para la condición inicial $q(0) = 1$, que fue seleccionada para la solución analítica del problema, se reproduce perfectamente mediante el método numérico empleado en Python. Es importante destacar que este grado de ajuste solo es posible con ecuaciones diferenciales lineales. En otros casos, en algún punto, se pueden observar diferencias en las predicciones obtenidas por ambos métodos.

4.2.2 Ley de Gauss eléctrica

En términos sencillos, la ley de Gauss se puede describir como la forma en que las líneas de campo eléctrico se distribuyen alrededor de una carga eléctrica. Podemos imaginarlo de manera similar a un recipiente lleno de agua con múltiples agujeros. En este caso, la carga eléctrica se asemeja al agua, que fluye a lo largo de diferentes caminos representados por las líneas de campo eléctrico. La cantidad de agua almacenada en el recipiente se relaciona con la carga encerrada, y las fugas de agua a través de los agujeros se corresponden con el flujo eléctrico total (la suma de todas las fugas). Este último se puede escribir matemáticamente de varias formas, primero, considerando cargas discretas esparcidas por el espacio.

Como se observa en la figura 4.4, la comparación entre el fenómeno del campo eléctrico y un cubo descargando agua a través de orificios presenta ciertas similitudes. Sin embargo, esta analogía no es completamente precisa, ya que, en el caso del agua, la descarga está influenciada por la gravedad, mientras que en el campo eléctrico esto no ocurre. En este último caso, la trayectoria de las líneas de campo depende de la geometría de la distribución de carga y del medio en el que se propaga. Este aspecto se abordará con mayor detalle más adelante, al introducir la forma diferencial de la ley de Gauss.

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3} \quad (4.13)$$

Donde el término $\frac{\vec{x} - \vec{x}_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}$ hace referencia a la dirección de propagación del campo eléctrico (vector unitario). Por definición, para una coordenada arbitraria n , se tiene lo siguiente:

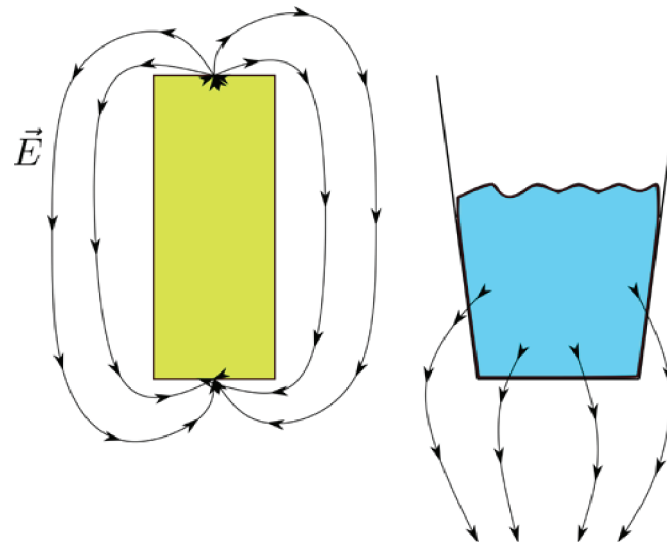


Figura 4.4 Analogía entre el cubo de agua y una distribución de carga en el espacio

$$\hat{e}_n = \frac{x - x_i}{|x - x_i|} = \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots}} \quad (4.14)$$

Entonces, la ecuación 4.13 es una forma compacta de representar el campo eléctrico, incluida la dirección, sin recurrir a la notación de vector unitario. La figura 4.5 representa geoméricamente esta situación.

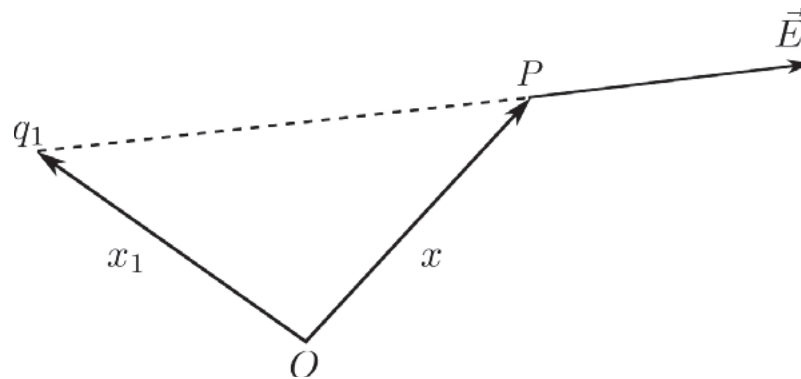


Figura 4.5 Descripción del campo eléctrico producido por la carga q_1 en el punto P

De aquí se evidencia claramente que la coordenada x es el lugar donde se desea encontrar el campo eléctrico, mientras que x_i es la posición donde se encuentra la carga o la distribución desde la cual emanan las líneas de campo. Partiendo de esto último, se hace necesario definir estas estructuras, es decir, teniendo en cuenta los elementos diferenciales, por lo cual la ecuación 4.13 toma la siguiente forma:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(x') \frac{x - x'}{|x - x'|^3} d^3x' \quad (4.15)$$

Donde $\rho(x')$ hace referencia a la distribución de carga eléctrica de origen y d^3x' es el elemento diferencial de volumen, es decir, $d^3x' = dx'dy'dz$ en coordenadas cartesianas.

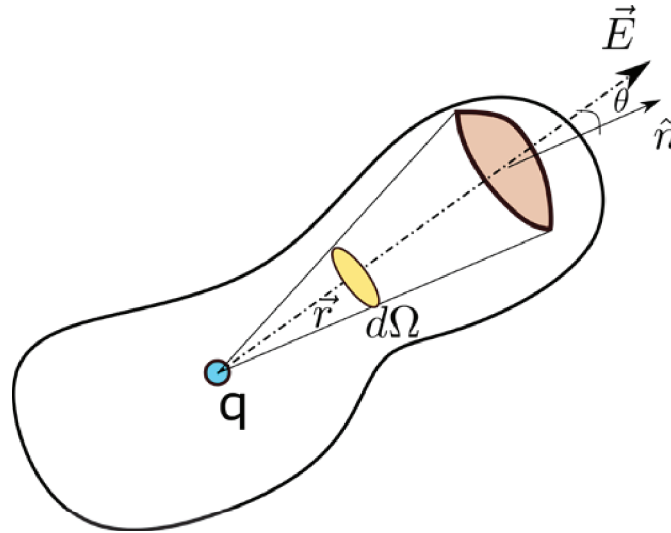


Figura 4.6 Ley de Gauss desde la perspectiva de la interpretación de ángulo sólido

Partiendo de lo planteado en la figura 4.6, se puede obtener una aproximación de la ley de Gauss integral. Esta ley establece que el flujo saliente del campo eléctrico a través de la superficie exterior de un volumen de control es igual a la carga encerrada por dicho volumen. En otras palabras, si sumamos todas las contribuciones de las líneas de campo eléctrico, podemos determinar el valor de esta carga. A esta técnica matemática se le conoce como superficie gaussiana y al proceso de obtener el valor de la carga eléctrica se le denomina Ley de Gauss.

Para comprender mejor este concepto, se requiere calcular el siguiente producto punto, teniendo en cuenta la figura ya mencionada anteriormente y tomando como referencia la definición de campo eléctrico y vector unitario:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} dA \quad (4.16)$$

La pregunta que surge a continuación se refiere a la necesidad de involucrar el concepto de ángulo sólido en esta discusión. Esta cuestión surge debido al comportamiento que presenta este fenómeno. Observemos el elemento de ángulo sólido de la figura 4.6, denotado como $d\Omega$. Cuando dicho elemento se acerca a la superficie, comienza a expandirse hasta convertirse en el diferencial de área. Por el contrario, si se moviera hacia la carga, su tamaño comenzaría a disminuir hasta convertirse en un punto justo sobre ella. Todo lo anterior sucede en función de $\frac{A}{r^2}$. Esto implica que la propagación del campo eléctrico en el espacio sigue una lógica similar: su magnitud disminuye en función del cuadrado de la distancia desde la carga hasta el punto donde se desea medir.

En términos simples, a medida que se abarque un área mayor, la cantidad de líneas de campo disminuirá en proporción inversa al cuadrado de la distancia.

Lo anterior queda de manifiesto si se tiene en cuenta la definición de elemento diferencial de ángulo sólido, es decir, $d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2}$, por lo tanto, 4.16 se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} dA}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (4.17)$$

Lo anterior en virtud de la definición de producto punto. Si además se integrase a ambos lados, entonces la expresión 4.17 quedaría de la siguiente manera:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V d\Omega \quad (4.18)$$

Por definición, $\int d\Omega = 4\pi$, por tanto:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{q}{\epsilon_0}} \quad (4.19)$$

A esta última expresión se le conoce como la forma integral de la ley de Gauss eléctrica o la primera de las ecuaciones de Maxwell.

Ahora se procederá a deducir la versión diferencial de esta misma ecuación. Para este fin, se empleará el teorema de la divergencia y se supondrá que, en lugar de una carga puntual, se trabajará con una distribución de carga:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{X}) dV \quad (4.20)$$

Agrupando términos:

$$\int_A \vec{E} \cdot \hat{n} dA - \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{X}) dV = 0 \quad (4.21)$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término del lado izquierdo:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV - \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\vec{X}) dV = 0 \quad (4.22)$$

Por lo tanto:

$$\int_V [\nabla \cdot \vec{E} - \frac{\rho(\vec{X})}{\epsilon_0}] dV = 0 \quad (4.23)$$

A partir de la última expresión, se deduce claramente que la ecuación (4.36) solo tiene sentido si y solo si el integrando es igual a cero.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{X})}{\epsilon_0}} \quad (4.24)$$

A 4.24 se le conoce como la ley de Gauss eléctrica diferencial. En la siguiente sección se mostrará cómo aplicar los conceptos aquí presentados.

4.2.3 Aplicaciones ley de Gauss: distribuciones de carga

La estimación del campo eléctrico proveniente de distribuciones de carga es una de las aplicaciones más comunes de la ley de Gauss eléctrica e involucra la introducción de un concepto nuevo, como la densidad de carga, la cual permite simplificar cálculos al tratar una cantidad discreta de cargas como si se tratase de un continuo. Cada una de ellas se simboliza de acuerdo a la siguiente convención: densidad de carga lineal ($\lambda = \frac{C}{m}$), densidad superficial de carga ($\sigma = \frac{C}{m^2}$) y, finalmente, densidad volumétrica de carga ($\rho = \frac{C}{m^3}$).

4.2.3.1 Línea de carga

Si se tiene una línea de carga uniforme q , de dimensiones como las mostradas en la figura 4.7, entonces, mediante la aplicación de la ley de Gauss, es posible obtener el siguiente resultado para el campo eléctrico a una distancia h de la fuente. Se debe tener en cuenta que los vectores de campo eléctrico radiales irradiados desde esta presentan una componente neta perpendicular a la línea cargada, como se muestra.

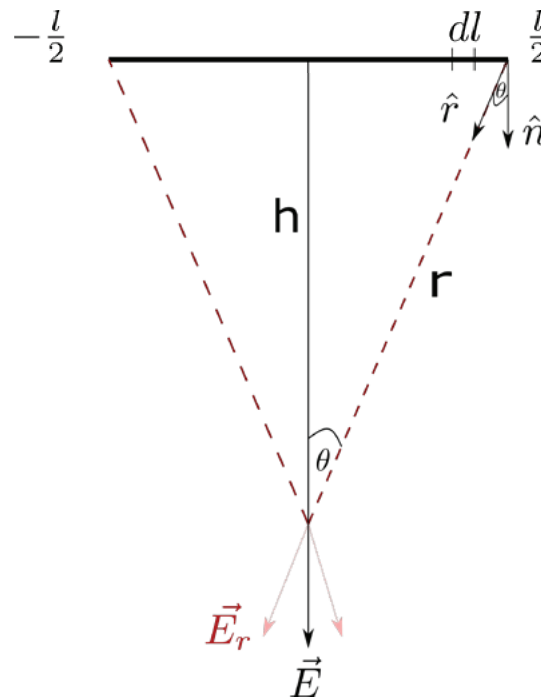


Figura 4.7 Campo eléctrico producido por una línea de carga uniforme q

Partiendo de la forma dada por 4.16 de la ley de Gauss, se tiene que:

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\theta)}{r^2} dS \tag{4.25}$$

Y, de la gráfica, se sabe que:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + (\frac{\ell}{2})^2}} \tag{4.26}$$

Combinando las ecuaciones 4.25 y 4.26, se obtiene:

$$\oint \vec{E} \, d\ell = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{h \, d\ell}{\left(h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (4.27)$$

Aplicando sustitución trigonométrica, es posible resolver la integral del lado derecho de la ecuación 4.27, es decir:

$$\frac{\ell}{2} = h \tan(\theta) \rightarrow \ell = 2h \tan(\theta) \quad (4.28)$$

Con

$$d\ell = 2h \sec^2(\theta) \, d\theta \quad (4.29)$$

Por lo tanto, la integral de la ecuación 4.27 quedaría de la siguiente forma:

$$\int \frac{2h^2 \sec^2(\theta) \, d\theta}{\left(h^2 + h^2 \tan^2(\theta)\right)^{3/2}} \quad (4.30)$$

Simplificando, se tiene:

$$\frac{2}{h} \int \cos(\theta) \, d\theta = \frac{2}{h} \sin(\theta) = \frac{2\ell}{2h\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + h^2}} = \frac{\ell}{h\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + h^2}} \Bigg|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \quad (4.31)$$

Teniendo en cuenta que el lado izquierdo de la ecuación 4.27 es igual a:

$$\oint_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \vec{E} \cdot d\ell = \vec{E} \ell \quad (4.32)$$

Entonces, la expresión para el campo eléctrico en este contexto sería la siguiente:

$$\vec{E} \ell = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell}{h\sqrt{\frac{\ell^2}{16} + h^2}} \rightarrow \vec{E} = \frac{k\ell\lambda}{h\sqrt{\frac{\ell^2}{16} + h^2}} \quad (4.33)$$

Con $\lambda = \frac{q}{\ell}$ la densidad lineal de carga eléctrica y $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Con esta expresión es posible predecir dos resultados muy importantes: cuando la línea de carga es infinita y cuando la distancia del observador a esta es mucho mayor que su longitud.

Para el primer caso, se tiene que $\ell \gg h$ o $\ell \rightarrow \infty$. Entonces:

$$\vec{E} = k\lambda \lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\ell}{h\sqrt{\frac{\ell^2}{16} + h^2}} = \frac{4k\lambda}{h} \quad (4.34)$$

En el otro caso, $h \gg \ell$ y $\vec{E} \rightarrow 0$:

$$\vec{E} = k\lambda \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\ell}{h\sqrt{\frac{\ell^2}{16} + h^2}} = 0 \quad (4.35)$$

4.2.3.2 Anillo cargado

En este caso, se busca determinar el campo eléctrico asociado a una distribución uniforme de carga eléctrica en una configuración de anillo, teniendo en cuenta las dimensiones presentadas en la figura 4.8. La aplicación de la ley de Gauss arroja lo siguiente.

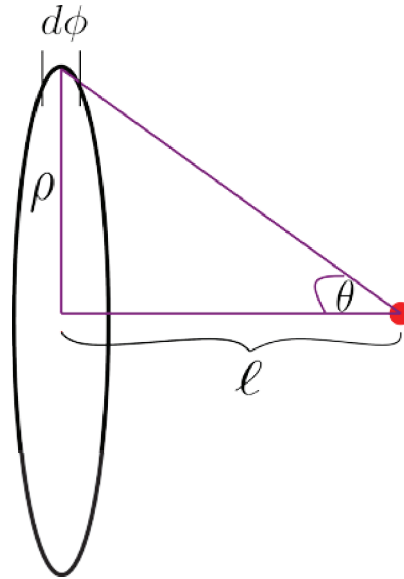


Figura 4.8 Campo eléctrico producido por un anillo cargado con densidad lineal de carga λ

Tomando como punto de partida la ecuación 4.16, es posible construir un modelo que describa las líneas de campo eléctrico para esta configuración. Primero, se procederá a determinar la equivalencia en términos de los parámetros descritos en la figura. Por ejemplo, la equivalencia de $\cos(\theta)$ es la siguiente:

$$\cos(\theta) = \frac{\ell}{\sqrt{\rho^2 + \ell^2}} \quad (4.36)$$

Debido a la simetría del anillo, se procederá a obtener el diferencial de línea en coordenadas cilíndricas:

$$dL = \rho d\phi \quad (4.37)$$

Es importante notar que el campo eléctrico se anula alrededor del anillo, ya que siempre existirá una componente del campo eléctrico apuntando en dirección contraria en cada punto. Las únicas líneas que no se anulan son las que apuntan directamente hacia el lugar donde queremos calcular el campo eléctrico. En ese sitio, las componentes del campo eléctrico se suman, permitiendo encontrar una resultante en la dirección z (suma de vectores), como se muestra en la figura 4.9.

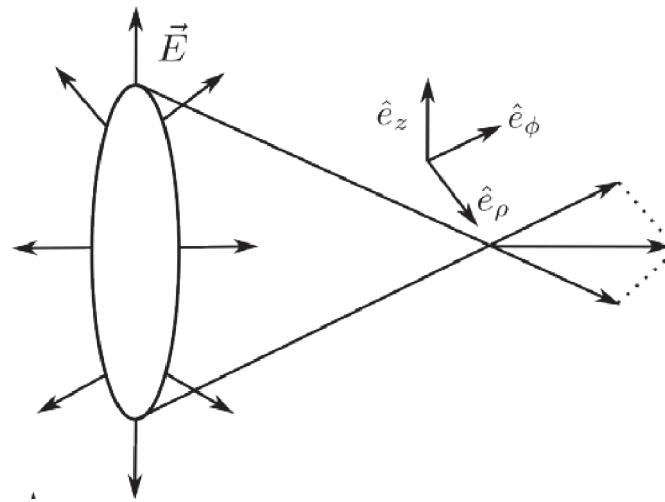


Figura 4.9 Análisis vectorial del campo eléctrico producido por el anillo

Asimismo, se tiene:

$$r^2 = \rho^2 + \ell^2 \quad (4.38)$$

Sustituyendo todo lo anterior en la ecuación mencionada al principio, se obtiene:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} dL = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell \rho d\phi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.39)$$

Integrando ambos lados, se obtiene:

$$\oint_0^{2\pi} \vec{E} \cdot \hat{n} \rho d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\ell \rho d\phi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.40)$$

Resolviendo:

$$2\pi\rho\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell\rho 2\pi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.41)$$

Haciendo uso de la densidad lineal de carga, es decir, $\lambda = \frac{q}{2\pi\rho}$, la ecuación 4.41 queda de la siguiente forma:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi\lambda\ell\rho}{(\ell^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.42)$$

Si se toma el término $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, entonces finalmente se tiene la expresión para el campo eléctrico producido por un anillo cargado uniformemente a lo largo del eje z :

$$\vec{E} = \frac{2\pi\kappa\lambda\ell\rho}{(\ell^2 + \rho^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.43)$$

Para profundizar en la comprensión de este fenómeno, es necesario ir un paso más allá. Por ello, se recurrirá a una simulación en Python que permite entender de manera sencilla el sentido de calcular estas situaciones.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from ipywidgets import interact, FloatSlider
4 #libreria para calculos interactivos
5
6 def plot_charged_ring(radius, lambda_, l):
7 # Grafica del anillo tomando 100 puntos
8     num_points = 100
9
10    x = np.linspace(-2, 2, 100)
11    y = np.linspace(-2, 2, 100)
12
13    X, Y = np.meshgrid(x, y)
14
15    Ex = np.zeros_like(X)
16    Ey = np.zeros_like(Y)
17
18    for i in range(num_points):
19        dx = X - radius * np.cos(2 * np.pi * i / num_points)
20        dy = Y - radius * np.sin(2 * np.pi * i / num_points)
21
22        rho = np.sqrt(dx ** 2 + dy ** 2)
23
24        E=(2*np.pi*lambda_ * l * rho)/((1 ** 2 + rho ** 2) ** (3/2))
25        #Ecuacion para calcular el campo electrico de un anillo
26
27        theta = np.arctan2(dy, dx)
28        Ex += E * np.cos(theta)
29        Ey += E * np.sin(theta)
30
31    plt.figure()
32
33    plt.streamplot(X, Y, Ex, Ey, color='k', linewidth=1, density=2)
34
35    theta = np.linspace(0, 2 * np.pi, num_points)
36    x_ring = radius * np.cos(theta)
37    y_ring = radius * np.sin(theta)
38    plt.plot(x_ring, y_ring, 'k', linewidth=4)
39
40    intensity = np.sqrt(Ex ** 2 + Ey ** 2)
41    plt.contourf(X, Y, intensity, cmap='inferno')
42
43    plt.colorbar(label='Intensidad de Campo Electrico')
44
45    plt.xlabel('X')

```

```

46 plt.ylabel('Y')
47 plt.title('Lineas de campo electrico de un anillo cargado')
48
49 plt.axis('equal')
50 plt.grid(True)
51 plt.show()
52
53 interact(plot_charged_ring, radius=FloatSlider(min=0.1,max=2.0,
54 step=0.1, value=1.0), lambda_=FloatSlider(min=0.1,max=2.0,step=0.1,
55 value=1.0), l=FloatSlider(min=0.1,max=2.0,step=0.1, value=1.0))

```

Código 4.3 Simulación de un anillo cargado

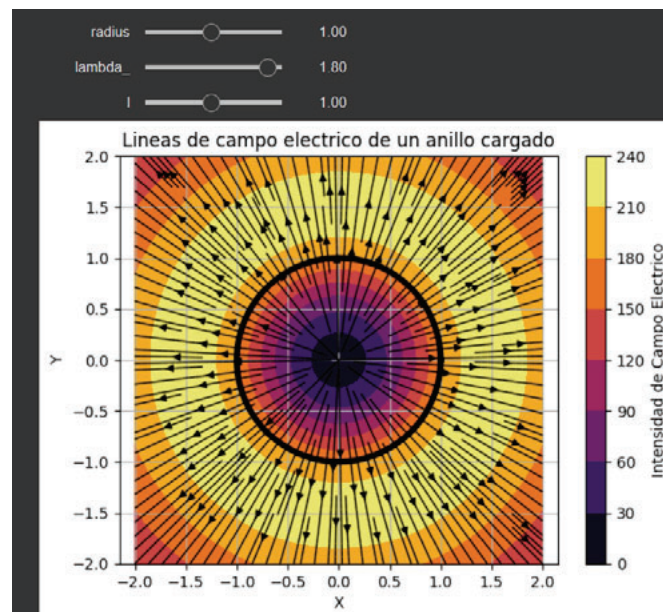


Figura 4.10 Simulación de un anillo cargado empleando una librería interactiva de Python

En este código, se crea un objeto que permite modificar la densidad lineal de carga, el radio y la distancia a la cual se desea calcular el campo eléctrico. Asimismo, se incluye un mapa de calor para visualizar de manera más clara la intensidad del campo eléctrico. Este código se recomienda ser ejecutado en Google Colab, con el fin de evitar posibles conflictos durante la instalación de librerías. En la figura 4.10 se muestra el resultado obtenido.

4.2.3.3 Disco cargado

En este caso particular, es necesario recurrir al concepto de densidad superficial de carga σ . Para ello, se resolverá el mismo problema planteado anteriormente, pero considerando toda la superficie encerrada por el anillo, es decir, un disco. Por consiguiente, la única modificación requerida es el diferencial de área:

$$dA = \rho d\rho d\phi \quad (4.44)$$

Por lo tanto, la ecuación 4.39 adopta la siguiente forma:

$$\vec{E} \cdot \hat{n} \rho d\rho d\phi = \frac{q\ell}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ell \rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.45)$$

Integrando ambos lados, se obtiene:

$$\vec{E} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\ell \rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.46)$$

Resolviendo primero el lado izquierdo:

$$\pi R^2 \vec{E} = \frac{q\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + \ell^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.47)$$

Aplicando una sustitución, donde $U = \rho^2 + \ell^2$ y $dU = 2\rho d\rho$, la primera integral se reescribe como:

$$\pi R^2 \vec{E} = \frac{q\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{\rho dU d\phi}{2\rho U^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.48)$$

Definiendo $\sigma = \frac{q}{\pi R^2}$ y despejando el lado izquierdo de la ecuación:

$$\vec{E} = \frac{\sigma\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left. \frac{-\mathcal{Z}}{\mathcal{Z}(\rho^2 + \ell^2)^{1/2}} \right|_0^R d\phi \hat{e}_z \quad (4.49)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma\ell}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{\ell} - \frac{1}{(R^2 + \ell^2)^{1/2}} \right] d\phi \hat{e}_z \quad (4.50)$$

Considerando nuevamente la equivalencia de κ , y dado que los demás términos son constantes respecto de ϕ , el campo eléctrico para un disco uniformemente cargado está dado por:

$$\vec{E} = 2\pi\kappa\sigma \left[1 - \frac{\ell}{(R^2 + \ell^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_z \quad (4.51)$$

4.2.3.4 Cilindro uniformemente cargado

Este caso es fundamental al hablar de capacitancia, ya que uno de los principales tipos de capacitores es el cilíndrico. Por lo tanto, analizar el problema del campo eléctrico generado por un cilindro cargado simplificará los cálculos necesarios para determinar el potencial eléctrico en esta configuración. Dicha simplificación será especialmente útil para calcular la capacitancia.

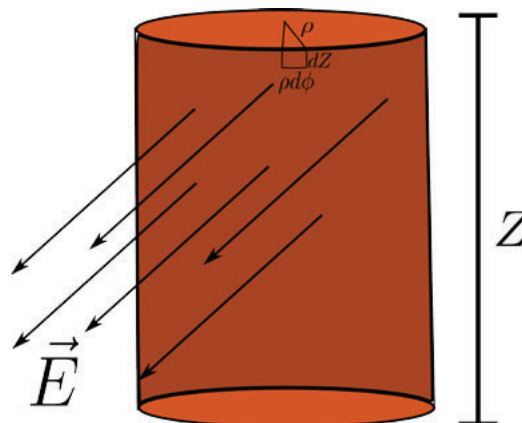


Figura 4.11 Campo eléctrico generado por un cilindro uniformemente cargado

Para resolver este problema, se empleará la forma integral de la ley de Gauss. Partiendo de la ecuación 4.18 y considerando el elemento diferencial de área dS mostrado en la figura 4.11, se puede describir el campo eléctrico generado por un cilindro uniformemente cargado de la siguiente manera:

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} = \vec{E} \int_0^{2\pi} \int_0^z \rho d\phi dz = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.52)$$

La forma de esta expresión se puede justificar desde dos perspectivas. En primer lugar, se considera que el campo eléctrico se define únicamente en la dirección ρ del sistema de coordenadas cilíndrico. En segundo lugar, se supone que el radio del cilindro es mucho menor que su longitud, es decir, $\rho \ll z$, por lo que los efectos de los extremos pueden ignorarse. En consecuencia, el producto punto entre el campo eléctrico y el vector unitario normal se simplifica, ya que ambos son paralelos, reduciéndose al producto de sus magnitudes.

Simplificando y evaluando las integrales presentadas en 4.52, se obtiene el campo eléctrico para esta configuración:

$$2\pi\rho z\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\rho z} \hat{e}_\rho \quad (4.53)$$

Si se define $\lambda = \frac{q}{z}$, entonces:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{e}_\rho} \quad (4.54)$$

4.2.3.5 Campo eléctrico de una esfera cargada

El siguiente ejemplo tiene como propósito calcular el campo eléctrico generado por una esfera en el espacio, para demostrar que su comportamiento es equivalente al de una carga puntual. Esta situación es intuitiva al considerar un objeto esférico que, al alejarnos, parece reducir su tamaño. Si continuamos alejándonos indefinidamente, la esfera se percibe efectivamente como un punto desde la perspectiva del observador. Aquí es donde el concepto de ángulo sólido en física resulta relevante, ya que proporciona herramientas matemáticas para analizar este tipo de situaciones.

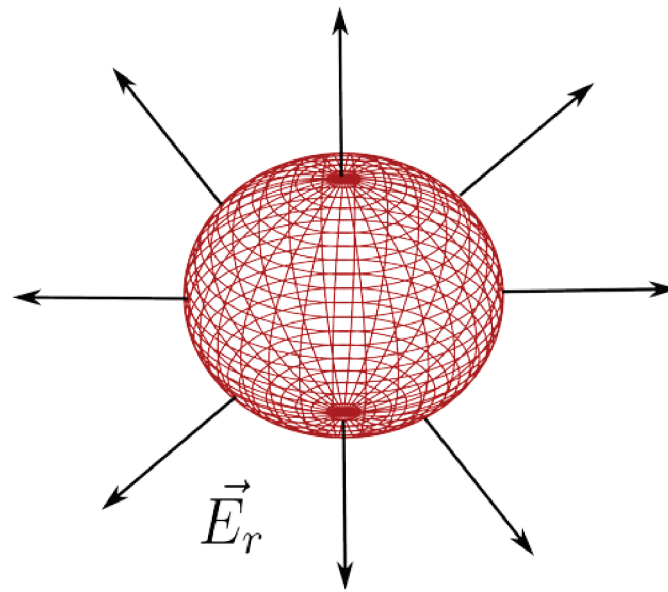


Figura 4.12 Campo eléctrico generado por una esfera uniformemente cargada

Haciendo uso de la ley de Gauss en su forma integral y considerando el diferencial de superficie cuando el radio es constante, $dS_r = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$, se obtienen las mismas consideraciones aplicadas al cilindro cargado para este caso.

$$\oint \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.55)$$

Integrando respecto a θ , se tiene:

$$r^2 \vec{E} \int_0^{2\pi} -\cos(\theta) \Big|_0^\pi d\phi = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (4.56)$$

\therefore

$$4\pi r^2 \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \hat{e}_r \quad (4.57)$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r} \quad (4.58)$$

La expresión obtenida en 4.58 confirma que, efectivamente, el campo eléctrico producido por una esfera uniformemente cargada es equivalente al generado por una carga puntual.

4.2.3.6 Campo eléctrico de una parábola uniformemente cargada

Para concluir esta sección, se presentará un ejemplo más elaborado que busca determinar el campo eléctrico en el foco de una parábola horizontal con vértice en el origen y foco $F(a, 0)$, como se ilustra en la figura 4.13.

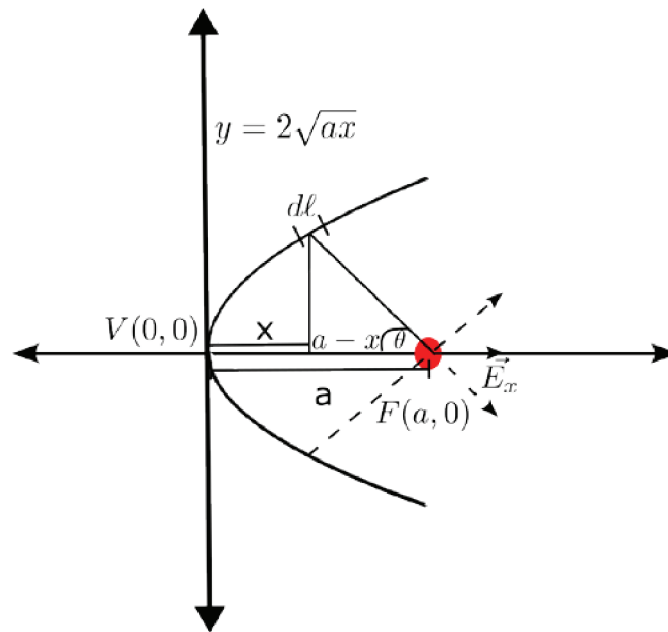


Figura 4.13 Campo eléctrico en el eje focal debido a una parábola uniformemente cargada

En este caso, la única componente que no se anula se encuentra en la dirección x . Esto simplifica considerablemente el problema, ya que el diferencial de línea se reduce a $d\ell = dx\hat{e}_x + dy\hat{e}_y = dx\hat{e}_x$. Como resultado, el proceso de integración se vuelve más sencillo. Partiendo nuevamente de la ecuación 4.16, se deben identificar los términos relevantes, tal como se ha hecho hasta ahora.

Dado que el diferencial de línea es simplemente dx , se procederá directamente a encontrar las expresiones para r^2 y $\cos(\theta)$.

$$\cos(\theta) = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + 4ax}} \quad (4.59)$$

Por lo tanto:

$$r^2 = (a-x)^2 + 4ax \quad (4.60)$$

Estas expresiones se obtienen al interpretar la figura de la parábola junto con su ecuación constitutiva. A partir de estas relaciones, se calcula la componente y del vector distancia \vec{r} . Aplicando el teorema de Pitágoras, se determina la hipotenusa correspondiente a $\cos(\theta)$ y, simultáneamente, el valor de r^2 . Sustituyendo estos resultados en la ecuación 4.16 de la ley de Gauss, se concluye que:

$$\vec{E} \int_0^a dx = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{(a-x)dx}{[(a-x)^2 + 4ax]^{3/2}} \hat{e}_x \quad (4.61)$$

Dado que $\lambda = \frac{q}{a}$, se puede expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{(a-x)dx}{[(a-x)^2 + 4ax]^{3/2}} \hat{e}_x \quad (4.62)$$

Resolviendo el cuadrado en el denominador y simplificando, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{(a-x)dx}{[(a+x)^2]^{3/2}} \hat{e}_x \quad (4.63)$$

De este modo, la integral queda definida como:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{(a-x)dx}{(a+x)^3} \hat{e}_x \quad (4.64)$$

Aplicando fracciones parciales, se tiene:

$$\frac{a-x}{(a+x)^3} = \frac{2a}{(a+x)^3} - \frac{1}{(a+x)^2} \quad (4.65)$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación 4.64 es la siguiente:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(a+x)^2} \Big|_0^a = \frac{\lambda}{16\pi\epsilon_0 a} \quad (4.66)$$

4.2.4 Capacitancia y potencial eléctrico

4.2.4.1 Potencial eléctrico

En términos simples, el campo eléctrico se puede definir como la energía potencial eléctrica por unidad de carga. Es decir, es el trabajo necesario para mover una carga de prueba (hipotética) de un punto de referencia a otro sin perturbar el campo eléctrico. Este concepto se simboliza con la letra griega ϕ y, como ya se mencionó, sus unidades son $\frac{J}{C}$ o simplemente voltios (V) [17]. Basándonos en la figura 4.14, se tiene:

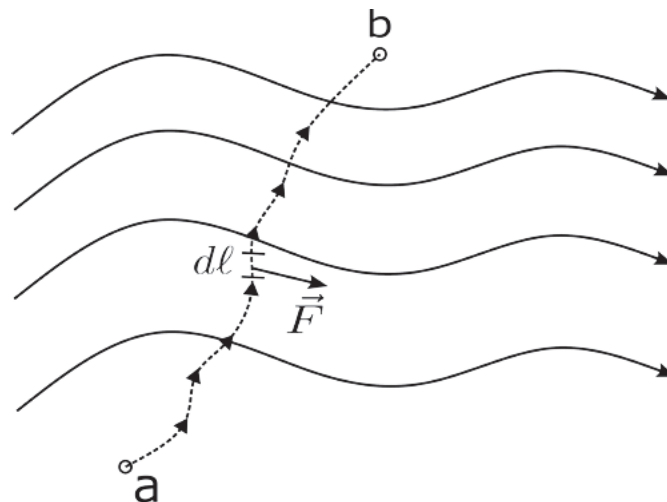


Figura 4.14 Trabajo eléctrico realizado para desplazar una carga del punto a al punto b

El trabajo realizado para desplazar una carga entre los puntos a y b está dado por la siguiente expresión:

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\ell \quad (4.67)$$

Dado que la fuerza eléctrica está expresada como $\vec{F} = q\vec{E}$, se tiene:

$$W = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\ell \tag{4.68}$$

Esto se debe a que el trabajo se realiza en contra del sentido de la fuerza y que la carga se considera constante, como se muestra en la figura.

A continuación, la discusión se centrará en el campo eléctrico. Como se mencionó en otra sección, para una distribución continua de carga ρ , se tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x)(x-x')d^3x}{|x-x'|^3} \tag{4.69}$$

Haciendo una pausa en este desarrollo y centrando la atención únicamente en el termino.

$$\frac{(x-x')}{|x-x'|^3} \tag{4.70}$$

Ademas, recordando que.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{x}{x^3} \tag{4.71}$$

Entonces, aplicando el mismo concepto al vector \vec{x} en coordenadas cartesianas³.

$$\frac{x-x'}{|x-x'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{x-x'} \right) \tag{4.72}$$

Por lo tanto el potencial eléctrico se puede reescribir como.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(x) \nabla \left(\frac{-1}{x-x'} \right) d^3x \tag{4.73}$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, la expresión 4.73 queda de la siguiente forma.

$$\vec{E} = -\nabla \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x)d^3x}{x-x'} \tag{4.74}$$

Haciendo:

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x)d^3x}{x-x'} \tag{4.75}$$

Donde ϕ es el potencial eléctrico.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \tag{4.76}$$

³Esto es extrapolable a otros sistemas de coordenadas.

O, en otras palabras, el gradiente del potencial eléctrico (campo escalar) es el campo eléctrico (campo vectorial).

Volviendo a la ecuación 4.69, se tiene:

$$W = - \int_a^b -q \nabla \phi(x) \cdot d\ell \tag{4.77}$$

Aplicando nuevamente el teorema fundamental del cálculo, esta vez a la ecuación 4.77:

$$W = -q \int_a^b \nabla \phi(x) \cdot d\ell = q(\phi_b - \phi_a) \tag{4.78}$$

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\ell = -(\phi_b(x) - \phi_a(x)) = V \tag{4.79}$$

De lo anterior, se concluye que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = 0 \tag{4.80}$$

En una trayectoria cerrada, el potencial eléctrico es nulo, es decir, no existe una diferencia de potencial. Este fenómeno puede observarse utilizando un recipiente con agua y una pequeña cantidad de sal. Dentro del recipiente, se colocan dos electrodos en los extremos, los cuales están conectados a una batería. Si se mide el voltaje con un multímetro en un mismo punto, es decir, colocando las puntas del instrumento a la misma distancia de uno de los electrodos, este indicará aproximadamente 0 V.

Una forma de explicar este fenómeno es considerar qué se está midiendo. Generalmente, se utiliza como referencia la tierra o el infinito, definiendo el voltaje como una diferencia. Una analogía cercana sería la energía potencial gravitacional (mgh), donde la altura se mide con respecto a un punto de referencia, como el nivel de la calle en un edificio o la superficie de una mesa en una oficina. En el caso del potencial eléctrico, sucede algo similar. Este concepto se abordará con mayor detalle al definir la energía potencial eléctrica.

En general, para un sistema discreto de cargas, el potencial eléctrico presentado en la ecuación 4.75 toma la siguiente forma:

$$U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|x - x_i|} \tag{4.81}$$

Donde x representa el punto en el que se evalúa el potencial eléctrico y x_i corresponde a la coordenada en la que se encuentra localizada la carga eléctrica q_i . En el siguiente ejemplo, se

ilustra este concepto.

Ejemplo

Dos cargas puntuales de $-60 \mu\text{C}$ y $100 \mu\text{C}$ se localizan en $(2, 2, 2)$ y $(0, -2, -3)$ respectivamente. Encuentre el potencial eléctrico en el origen (ver figura 4.15).

Para resolver este problema nos remitiremos a la ecuación 4.81, la primera parte es determinar el valor de la magnitud del vector distancia, entre cada una de las cargas y el origen:

Teniendo en cuenta que la primera carga se encuentra ubicada en $x = 2\hat{e}_x + 2\hat{e}_y + 2\hat{e}_z$, se tiene:

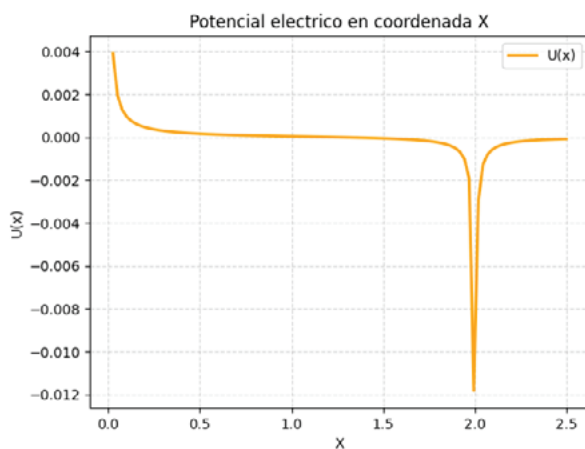
$$|(x - x_i)| = |(0, 0, 0) - (2, 2, 2)| = \sqrt{(0 - 2)^2 + (0 - 2)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{12} \quad (4.82)$$

Aplicando una lógica similar para la segunda carga, se obtiene lo siguiente:

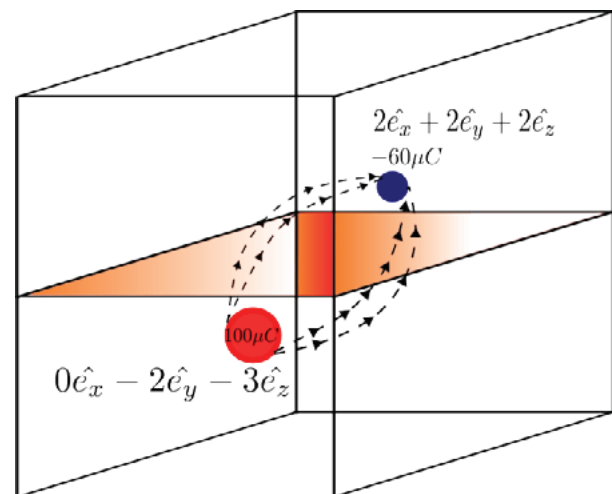
$$|(x - x_i)| = |(0, 0, 0) - (0, -2, -3)| = \sqrt{(0 - 0)^2 + (0 + 2)^2 + (0 + 3)^2} = \sqrt{13} \quad (4.83)$$

Por lo tanto, el potencial eléctrico se puede expresar como:

$$U(x) = \frac{-60 \times 10^{-6}\text{C}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{12}} + \frac{100 \times 10^{-6}\text{C}}{4\pi\epsilon_0\sqrt{13}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-60}{\sqrt{12}} + \frac{100}{\sqrt{13}} \right] \times 10^{-6}\text{V} \quad (4.84)$$



(a) Gráfico del potencial eléctrico respecto a la distancia entre cargas en el eje X.



(b) Esquema general del problema planteado.

Figura 4.15 Ejemplo de aplicación para el potencial eléctrico asociado a dos cargas puntuales

Para concluir esta sección, se incluye a continuación un código en Python que permite simular el comportamiento del potencial eléctrico en el caso de un dipolo, similar al problema previamente resuelto. En la figura 4.16 se pueden apreciar con mayor detalle los conceptos expuestos anteriormente.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from ipywidgets import interact, FloatSlider
4
5 # Constantes
6 k = 8.99 * 10**9 # Constante de Coulomb
7
8 # Funcion para calcular el potencial electrico en un punto
9 def calculate_potential(charge_1, charge_2, dist, x, y):
10     r1 = np.sqrt((x - dist/2)**2 + y**2)
11     r2 = np.sqrt((x + dist/2)**2 + y**2)
12     potential = k * (charge_1 / r1 + charge_2 / r2)
13     return potential
14
15 # Funcion para calcular el campo electrico en un punto
16 def calculate_field(charge_1, charge_2, dist, x, y):
17     r1 = np.sqrt((x - dist/2)**2 + y**2)
18     r2 = np.sqrt((x + dist/2)**2 + y**2)
19     field_x=k*(charge_1*(x-dist/2)/r1**3+charge_2*(x+dist/2)/r2**3)
20     field_y = k * (charge_1 * y / r1**3 + charge_2 * y / r2**3)
21     return field_x, field_y
22
23 # Funcion interactiva
24 @interact(charge_1=FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=1),
25           charge_2=FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=-1),
26           dist=FloatSlider(min=0.1, max=10, step=0.1, value=1))
27 def simulate_dipole(charge_1, charge_2, dist):
28     # Generar malla
29     x = np.linspace(-10, 10, 100)
30     y = np.linspace(-10, 10, 100)
31     X, Y = np.meshgrid(x, y)
32
33     # calcular potencial
34     potential = calculate_potential(charge_1, charge_2, dist, X, Y)
35
36     # calcular campo
37     field_x, field_y=calculate_field(charge_1, charge_2, dist, X, Y)
38
39     # graficar
40     fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))
41
42     # potencial electrico
43     ax1.set_title('Electric Potential')
44     ax1.set_xlabel('X')
45     ax1.set_ylabel('Y')
46     c = ax1.contourf(X, Y, potential, cmap='jet')
47     cbar = fig.colorbar(c, ax=ax1)
48     cbar.set_label('Potential')
49
50     # Campo electrico

```

```
51 ax2.set_title('Electric Field')
52 ax2.set_xlabel('X')
53 ax2.set_ylabel('Y')
54 ax2.quiver(X, Y, field_x, field_y)
55
56 plt.show()
```

Código 4.4 Simulación del campo eléctrico y magnético

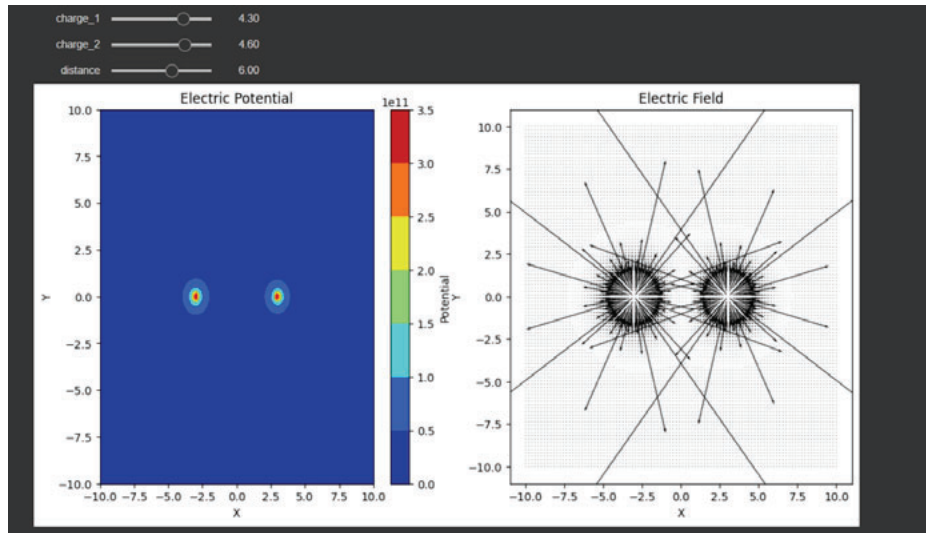


Figura 4.16 Simulación de un dipolo comparando potencial y campo eléctrico

4.2.4.2 Capacitancia

La capacitancia, como su nombre indica, se refiere a la capacidad de un material o dispositivo para almacenar carga eléctrica. Una analogía más tangible sería la de un tanque para almacenar agua, donde la capacidad de almacenamiento está determinada por el volumen del tanque. Aunque, en esencia, se trata de una situación similar, la capacidad de almacenar carga eléctrica es un concepto algo más abstracto. Por ejemplo, dos capacitores con las mismas dimensiones físicas, como volumen, área y separación entre placas, pueden tener capacitancias completamente diferentes.

En términos simples, la capacitancia es una propiedad fundamental que describe la capacidad de un objeto o sistema para almacenar carga eléctrica cuando se aplica un voltaje. Se refiere a la habilidad de un conductor o dispositivo, como un condensador, para acumular carga en respuesta a una diferencia de potencial aplicada. Se define como la relación entre la magnitud de la carga almacenada (Q) en el objeto y el cambio correspondiente en el potencial eléctrico (V) aplicado a través del mismo. Además, puede expresarse como $C = \frac{Q}{V}$.

La unidad de capacitancia en el Sistema Internacional (SI) es el faradio (F), nombrado en honor al físico británico Michael Faraday. El faradio se define como un coulomb por voltio (C/V), lo que indica que un faradio de capacitancia equivale a un coulomb de carga eléctrica almacenado en el objeto cuando se aplica un voltio [18].

A partir de lo anterior, se pueden derivar relaciones interesantes que permiten el diseño de capacitores. Es importante destacar que, para fines prácticos, la permitividad del vacío se toma simplemente como referencia. En este contexto, tiene más sentido hablar de la permitividad relativa, es decir, la permitividad del material en relación con la del vacío. Esto se expresa de la siguiente forma:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \tag{4.85}$$

Donde ϵ_r , también conocida como la permitividad relativa o constante dieléctrica, es un parámetro fundamental en el diseño de capacitores. A medida que esta constante aumenta, se hace posible diseñar condensadores más pequeños. Precisamente, el descubrimiento de materiales con tales propiedades ha facilitado el desarrollo de la electrónica moderna [19]. En la tabla 4.1 se presentan algunos de los materiales más utilizados en la fabricación de estos componentes.

Tabla 4.1 Permitividad relativa de varios materiales [1]

Material	Permitividad Relativa (ϵ_r)
Vacío	1
Aire	1.0006
Agua	80.4
Vidrio	4-10
Papel	2.5-3.5
Caucho	2-3
Oxido de Aluminio (Al_2O_3)	8.7-11.5
Silicio (Si)	11.68
Teflon (PTFE)	2.1-2.3

De lo anterior se tiene lo siguiente.

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{-\oint E \cdot d\ell} \tag{4.86}$$

En virtud de lo anterior, es posible calcular la capacitancia de una de las configuraciones de condensador más estudiadas: el condensador de placas paralelas. Para ello, se estimará el campo eléctrico de una placa rectangular infinita y, posteriormente, se determinará el potencial eléctrico asociado, como se mostrará a continuación.

4.2.4.3 Condensador de placas paralelas

En la figura 4.17 se presenta un condensador de placas paralelas. Se asumirá que dicha configuración tiene dimensiones infinitas con el fin de simplificar los cálculos y, finalmente, determinar la capacitancia de este dispositivo.

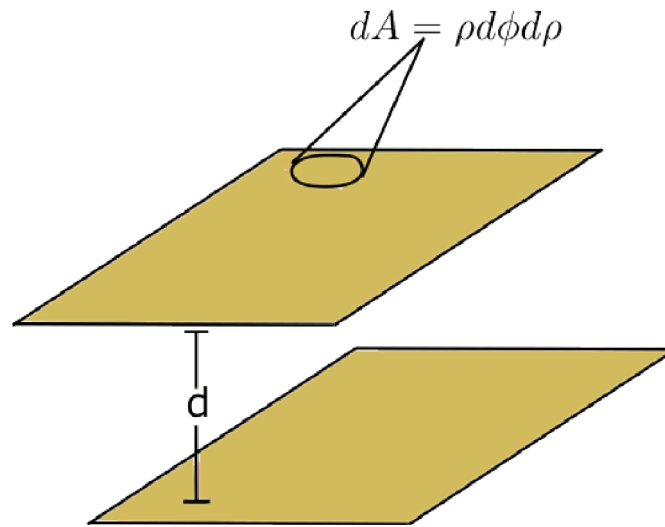


Figura 4.17 Representación gráfica de un condensador de placas paralelas

Siguiendo un procedimiento similar al de la sección dedicada a la aplicación de la Ley de Gauss, se determinará el campo eléctrico en el centro de la figura, a una distancia z de una de las placas. Para ello, se recurrirá a coordenadas cilíndricas con el objetivo de simplificar la integración.

$$\vec{E} \cdot dA = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{z\rho d\phi d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.87)$$

Integrando ambos lados, se obtiene:

$$\vec{E}\pi\rho^2 = \frac{qz}{4\pi\epsilon} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\phi d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.88)$$

Considerando la densidad superficial de carga $\sigma = \frac{q}{\pi\rho^2}$ e integrando con respecto a ϕ , se tiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.89)$$

Integrando nuevamente, esta vez con respecto a ρ y teniendo en cuenta que se trata de una integral impropia, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.90)$$

Realizando el cambio de variable $U = \rho^2 + z^2$, de modo que $dU = 2\rho d\rho$, se tiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\rho dU}{2\rho U^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dU}{U^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right|_0^b \quad (4.91)$$

Simplificando y evaluando el límite en 4.91, se obtiene:

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-1}{(b^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{1}{z} \right] = \boxed{\frac{\sigma}{2\epsilon}} \tag{4.92}$$

La ecuación 4.92 representa el campo eléctrico asociado a una lámina infinita. No obstante, en este caso, se requiere determinar el campo asociado a dos placas: una con carga positiva y otra con carga negativa. Para ilustrar esta situación, en la figura 4.18 se muestra el campo eléctrico neto en esta configuración específica.

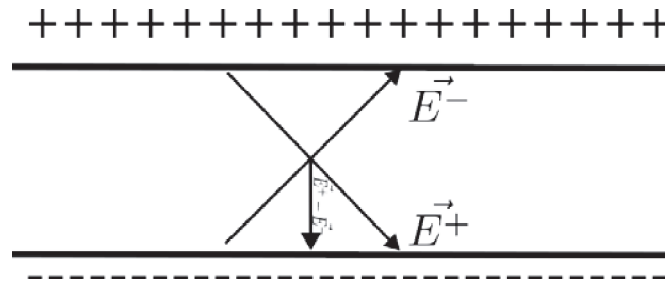


Figura 4.18 Campo eléctrico asociado a dos placas paralelas enfrentadas de diferente polaridad

Por lo anterior se puede concluir.

$$\vec{E}_T = \vec{E}^+ - \vec{E}^- = \frac{\sigma}{2\epsilon} - \frac{-\sigma}{2\epsilon} = \boxed{\frac{\sigma}{\epsilon}} \tag{4.93}$$

Conocido el campo eléctrico, el siguiente paso es determinar el potencial eléctrico, aplicando la ecuación 4.79.

$$V = \oint_0^d \vec{E} \cdot d\ell = \oint_0^d \frac{\sigma}{\epsilon} d\ell = \frac{\sigma}{\epsilon} \oint_0^d d\ell \tag{4.94}$$

$$V = \frac{d\sigma}{\epsilon} \tag{4.95}$$

Si se tiene en cuenta que $\sigma = \frac{Q}{A}$, entonces:

$$V = \frac{Qd}{A\epsilon} \tag{4.96}$$

Reemplazando en 4.86, se tiene:

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{A\epsilon}} = \boxed{\frac{A\epsilon}{d}} \tag{4.97}$$

Esta última expresión, es la capacitancia de un condensador de placas paralelas.

4.2.4.4 Condensador de cilindros concéntricos

De la figura 4.19, se tiene que para un condensador compuesto por dos cilindros concéntricos de altura z y radios a y b , la capacitancia se puede calcular de la siguiente manera:

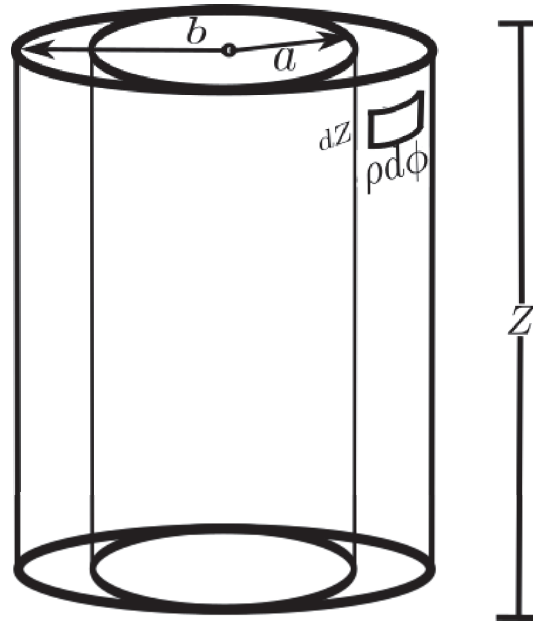


Figura 4.19 Condensador de cilindros concéntricos

Partiendo de la ecuación 4.54, que representa el campo eléctrico producido por un cilindro cargado, es posible determinar el potencial eléctrico en esta configuración:

$$\oint \vec{E} \cdot d\ell = \oint_a^b \frac{\lambda d\rho}{2\pi\epsilon\rho} \quad (4.98)$$

En la ecuación 4.98 se considera que el potencial eléctrico se calcula entre los cilindros, por lo que se elige $d\ell$ en esta dirección, es decir, radialmente (ρ). Por lo tanto:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_a^b \frac{d\rho}{\rho} \quad (4.99)$$

Integrando:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.100)$$

Sustituyendo en la ecuación 4.86 y considerando que $\lambda = \frac{Q}{z}$, se obtiene:

$$C = \frac{2\pi\epsilon z}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (4.101)$$

Esta expresión final corresponde a la relación buscada. Es importante destacar que el propósito principal de esta sección es que el lector se familiarice con el diseño de capacitores reales. Por ello, se sugiere como ejercicio intentar construir uno de estos dispositivos, lo que permitirá profundizar en los conceptos presentados.

4.2.4.5 Capacitor de casquetes esféricos

Para concluir esta sección, se calculará la capacitancia de un condensador compuesto por dos casquetes esféricos de radios R_1 y R_2 , tal como se muestra en la figura 4.20.

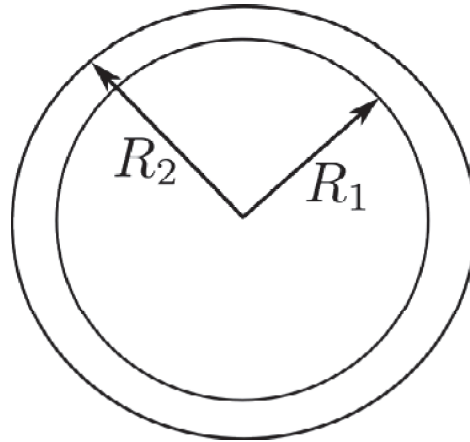


Figura 4.20 Condensador de casquetes esféricos con radios R_1 y R_2

Siguiendo el procedimiento descrito en las secciones anteriores, se partirá del campo eléctrico generado por una esfera cargada para calcular el potencial eléctrico. El campo eléctrico está dado por $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} \hat{e}_R$, por lo que:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right] \quad (4.102)$$

Esto implica que la capacitancia para esta configuración se expresa como:

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]} \quad (4.103)$$

4.2.5 Ley de Ohm y resistividad

Georg Simon Ohm formuló su teoría circuital en 1827, basándose en una serie de experimentos que le permitieron comprender la relación entre la corriente eléctrica, el voltaje y la resistencia. Hasta ese momento, se interpretaba la corriente como un flujo análogo al de un fluido. Sin embargo, estos experimentos arrojaron luz sobre la verdadera naturaleza de este fenómeno, demostrando que la corriente eléctrica se debe al movimiento de cargas. Es importante destacar las limitaciones de esa época, ya que la teoría cuántica aún no había emergido en el horizonte científico [20].

En 1900, el físico alemán Paul Drude desarrolló un modelo para describir el comportamiento de los electrones en un metal, basándose en la teoría clásica del electromagnetismo. Este modelo constituyó una aproximación fundamental que permitió entender ciertos fenómenos eléctricos en materiales conductores, llenando algunos vacíos en la teoría de Ohm. Sin embargo, aunque representó un avance significativo en su época, carecía de la profundidad teórica que posteriormente se alcanzaría con los trabajos de Planck, Bohr y otros científicos, quienes desarrollaron una comprensión más completa del transporte de carga.

Dado el alcance de este libro, la discusión se centrará en las ideas clásicas. En este contexto, el modelo de Drude puede describirse de manera sencilla al considerar que los electrones en un metal actúan como una "nube" de partículas cargadas negativamente que se mueven libremente dentro del material. Estos electrones están sujetos a la acción de un campo eléctrico aplicado y experimentan interacciones con los iones positivos del metal. El tiempo promedio entre colisiones electrón-ion se denomina tiempo de relajación y se simboliza con la letra griega τ .

A partir de esta base, se introduce la siguiente definición de momentum.

$$\vec{F} = ma = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} \tag{4.104}$$

De 4.104 es posible definir la velocidad en términos de la carga eléctrica y el campo.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = q\vec{E} \Rightarrow m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt} = q\vec{E} \int_0^\tau dt \tag{4.105}$$

A $\langle \vec{v} \rangle$ se le denomina velocidad promedio .:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{q\vec{E}\tau}{m} \tag{4.106}$$

Teniendo en cuenta que la densidad de carga superficial, esto es, la cantidad de partículas con carga que se mueve a través de una superficie por unidad de tiempo esta dada por.

$$\vec{J} = n \langle \vec{v} \rangle q \tag{4.107}$$

Donde n se denomina densidad numérica, esto es, el número de partículas contables por unidad de volumen ($n [=] \frac{1}{m^3}$), la cual equivale a:

$$n = \frac{N_a Z \rho_m}{M_w} \tag{4.108}$$

N_a , Z , ρ_m , M_w , son el número de Avogadro, numero atómico, densidad y peso molecular respectivamente. Nótese que, las unidades de 4.107 en efecto son consistentes $J [=] \frac{1}{m^3} \frac{m}{s} C [=] \frac{C}{sm^2} [=] \frac{A}{m^2}$. Por lo tanto, reemplazando 4.106 en 4.107, se tiene que.

$$\vec{J} = \left(\frac{nq^2\tau}{m} \right) \vec{E} \tag{4.109}$$

El término destacado hace referencia a la conductividad eléctrica, y la ecuación 4.109 se conoce como la ley de Ohm [21]. No obstante, existe una forma más comúnmente utilizada de esta ley. Para entenderla, es fundamental centrarse en el concepto de conductividad eléctrica y, por ende, en su recíproco: la resistividad eléctrica.

Esta propiedad de los materiales es inversamente proporcional a la distancia ℓ y directamente proporcional al área de la sección transversal A , como se ilustra en la figura 4.21.

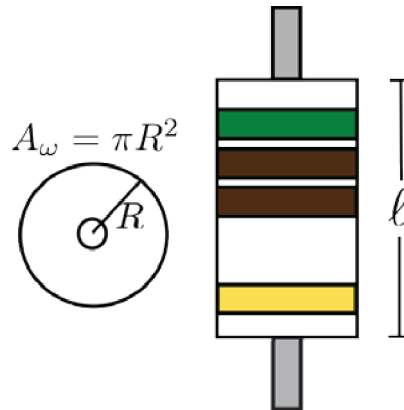


Figura 4.21 Esquema de un resistor de longitud ℓ y área de sección transversal A_ω

Durante el siglo XIX, Charles Pouillet de manera experimental lograría establecer esta relación y desarrollaría la ley que lleva su nombre [22], la cual se expresa de la siguiente manera:

$$\rho = R \frac{A}{\ell} \tag{4.110}$$

La ecuación mencionada está compuesta por R , la resistencia eléctrica medida en ohmios (Ω); ρ , la resistividad eléctrica medida en $\Omega \cdot m$; la longitud (ℓ) medida en metros (m); y el área de la sección transversal, también en metros cuadrados (m^2). Una vez conocida la relación 4.110, la conductividad, que representa la capacidad de un material para transportar carga eléctrica y se simboliza con la letra griega σ , se define como:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \tag{4.111}$$

Sus unidades son $\frac{S}{m}$, donde S corresponde al siemens ($\frac{1}{\Omega}$) en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.).

En la tabla 4.2 se puede encontrar algunos valores estándar para la resistividad.

Volviendo a la ecuación 4.109, tomando la parte resaltada como σ , así mismo, por definición $\vec{J} = \frac{\partial I}{\partial A}$ y recordando que $\vec{E} = -\nabla\phi$, entonces.

$$\frac{dI}{dA} = -\sigma \nabla\phi \tag{4.112}$$

Tabla 4.2 Valores de resistividad para algunos materiales

Material	Resistividad ρ (Ωm)
Cobre	$1,68 \times 10^{-8}$ [23]
Aluminio	$2,65 \times 10^{-8}$ [23]
Plata	$1,59 \times 10^{-8}$ [21]
Hierro	$9,71 \times 10^{-8}$ [23]
Oro	$2,44 \times 10^{-8}$ [21]

Lo anterior, dado que únicamente se considera que en un circuito la corriente fluye en una sola dirección, por tanto, la derivada parcial pasa a una total, por lo cual la ecuación diferencial quedaría de la siguiente forma.

$$I = -\sigma \nabla \phi \int_0^A dA \Rightarrow I = -\sigma \nabla \phi A \tag{4.113}$$

De 4.110 y 4.111, se puede reescribir 4.113.

$$I = -\left(\frac{\ell}{RA}\right) \nabla \phi A \tag{4.114}$$

Suponiendo que la corriente se transporta únicamente en el eje x, entonces $\nabla \phi = \frac{d\phi}{dX}$.

$$\frac{RI}{\ell} = -\frac{d\phi}{dX} \tag{4.115}$$

Integrando a ambos lados y teniendo en cuenta que en $X = 0$, la corriente eléctrica no se ha propagado aún y que la longitud del resistor es ℓ .

$$\frac{RI}{\ell} \int_0^\ell dX = - \int_a^b d\phi \tag{4.116}$$

Los puntos a, b son dos puntos arbitrarios que identifican el comienzo y fin del resistor, por lo anterior.

$$\frac{RI}{\ell} \ell = \phi(a) - \phi(b) = \Delta\phi = V \tag{4.117}$$

∴

$$\boxed{V = IR} \tag{4.118}$$

Esta forma de la ley de Ohm es la más empleada en ingeniería de circuitos y será la que se utilizará de aquí en adelante.

Para finalizar esta sección, se abordará brevemente la relación identificada por el propio Ohm entre la temperatura y la resistencia eléctrica. Esta explicación se realizará desde una perspectiva clásica, ya que una descripción más detallada y general requeriría un tratamiento desde la mecánica

cuántica. Un ejemplo destacado es la superconductividad, un fenómeno explicable únicamente desde esta perspectiva. Aunque no se tratará en profundidad, es relevante proporcionar una breve introducción debido a sus implicaciones tecnológicas.

De manera general, la superconductividad se caracteriza por dos fenómenos principales. Primero, la pérdida completa de la resistencia eléctrica de forma espontánea a una temperatura y presión específicas, determinadas por el tipo de material. Segundo, el efecto Meissner, que consiste en la expulsión de campos magnéticos del interior del material, generando un comportamiento similar al diamagnetismo perfecto [24]. Es interesante señalar que el físico neerlandés Heike Kamerlingh Onnes fue el primero en observar este efecto en 1911, al medir la caída repentina de la resistencia eléctrica en un filamento de mercurio. Además, Onnes fue pionero en el campo de la criogenia, siendo la primera persona en lograr la licuefacción del helio [25].

Retomando la relación entre temperatura y resistencia eléctrica, se tiene la siguiente ecuación diferencial.

$$\frac{dR}{dT} = \alpha R \tag{4.119}$$

Donde R es la resistencia eléctrica, T la temperatura, y α una propiedad del material denominada coeficiente de temperatura, cuyas unidades son $\frac{1}{K}$. La ecuación 4.119 predice una variación entre estas dos variables proporcional al producto de este coeficiente con la resistencia eléctrica del material, para un rango de temperatura no muy extremo. La ambigüedad surge del hecho de que no todos los materiales comparten el mismo intervalo de validez para esta propiedad [26].

Resolviendo la ecuación diferencial 4.119 con la condición inicial $R(T_0) = R_0$, se obtiene:

$$\ln(R) + C = \alpha T \tag{4.120}$$

Aplicando la condición inicial, se puede calcular la constante C :

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \alpha(T - T_0) \tag{4.121}$$

Despejando R , se tiene:

$$R(T) = R_0 e^{\alpha(T - T_0)} \tag{4.122}$$

Expandiendo el término exponencial en una serie de Taylor, se tiene lo siguiente:

Por definición, una serie de Taylor se expresa como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \tag{4.123}$$

En este caso, se toma $a = T_0$, lo que implica que la serie se expande alrededor de este valor. Para ello, se calculan las primeras derivadas $f^{(n)}(a)$, y, si es necesario, se evalúa un término n-ésimo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 R(T) &= e^{\alpha(T-T_0)} \Big|_{T=T_0} = 1, \\
 R'(T) &= \frac{d}{dT} e^{\alpha(T-T_0)} \Big|_{T=T_0} = \alpha, \\
 R''(T) &= \frac{d^2}{dT^2} e^{\alpha(T-T_0)} \Big|_{T=T_0} = \alpha^2, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Reemplazando estos términos en 4.123, se obtiene:

$$R(T) = 1 + \alpha(T - T_0) + \frac{\alpha^2}{2}(T - T_0)^2 + \dots \tag{4.124}$$

Este modelo, en particular, ha demostrado ser útil únicamente cuando la relación entre la temperatura y la resistencia eléctrica es aproximadamente lineal. Por lo tanto, solo se consideran los dos primeros términos. Tomando el resultado de 4.124 y sustituyéndolo en 4.122, se obtiene:

$$R(T) = R_0(1 + \alpha(T - T_0)) \tag{4.125}$$

En la tabla 4.3 se presentan algunos valores típicos para este parámetro.

Tabla 4.3 Coeficientes de temperatura para diferentes materiales

Material	Coeficientes de Temperatura $\alpha(\frac{1}{K})$ [27]
Cobre	0,00393
Silicio	-0,073
Aluminio	0,0036

4.2.6 Circuitos

La teoría de circuitos permite aplicar los conceptos tratados hasta ahora. El objetivo es demostrar la necesidad de recorrer este camino para llegar a la aplicación, de manera similar al proceso que transcurre desde la teoría científica hasta la innovación ingenieril. En este punto, se pone de manifiesto la relación entre la ciencia y la tecnología, y los conceptos físicos dejan de ser un capricho académico para convertirse en herramientas fundamentales en la solución de problemas.

A nivel histórico, la teoría de circuitos moderna fue desarrollada por varios científicos, entre ellos, Hans Christian Ørsted en 1829. Fue quien observó cómo la aguja de una brújula se desviaba al aproximarse a un alambre por el cual fluía una corriente eléctrica. De igual manera, el físico alemán Gustav Kirchhoff descubrió en 1840 que las leyes de conservación de la energía también son aplicables en los circuitos eléctricos [28]. Precisamente, este último punto será el foco de atención en esta sección, ya que, mediante la aplicación de la conservación de la carga (ley de corrientes) y la conservación del trabajo y la energía (ley de voltajes), es posible analizar una amplia variedad de configuraciones circuitales.

4.2.6.1 Circuitos resistivos, capacitivos e inductivos

Una de las características principales de los circuitos eléctricos es su topología, ya que el análisis de los mismos se simplifica dependiendo de su configuración. Los tipos de circuitos más comunes son: serie, paralelo, delta y estrella. Dado que este texto es introductorio, no se profundizará en redes complejas; en su lugar, se hará énfasis en las dos primeras topologías. Teniendo en cuenta lo anterior, se procederá a mostrar cómo se simplifican este tipo de mallas.

Antes de continuar con el análisis de circuitos, es importante destacar un elemento clave a la hora de trabajar con circuitos eléctricos: el código de colores de los resistores. Como se observa en la Tabla 4.4, este código permite identificar el valor de un resistor sin necesidad de recurrir a instrumentos de medida, como el multímetro u óhmetro.

Tabla 4.4 Código de colores de las resistencias con tolerancias

Color	Significado	Multiplicador	Tolerancia
Café	1	10^1	$\pm 1\%$
Rojo	2	10^2	$\pm 2\%$
Naranja	3	10^3	$\pm 3\%$
Amarillo	4	10^4	$\pm 4\%$
Verde	5	10^5	$\pm 0,5\%$
Azul	6	10^6	$\pm 0,25\%$
Violeta	7	10^7	$\pm 0,1\%$
Negro	0	10^0	
Gris	8	10^8	$\pm 0,05\%$
Blanco	9	10^9	
Dorado		10^{-1}	$\pm 5\%$
Plateado		10^{-2}	$\pm 10\%$

A modo de ejemplo, se empleará la figura 4.21, donde se pueden observar cuatro colores. Tres de ellos están relativamente cercanos entre sí, mientras que el cuarto se encuentra más alejado. Los primeros tres determinan el valor de la resistencia, mientras que el último representa la tolerancia, es decir, el rango de valores en el que puede fluctuar la resistencia. En este caso, la secuencia de colores es verde, café y café. Según la tabla, sus valores correspondientes son 5 y 1, respectivamente. Por lo tanto, el valor de este resistor sería: 5 (verde), 1 (café). El tercer color, también café, representa el multiplicador, en este caso 10^1 . Es importante destacar que el exponente corresponde al código del color mencionado. Con base en lo anterior, el valor de este resistor sería 510Ω , o también se puede expresar como $51 \times 10^1 = 510 \Omega$. En cuanto a la tolerancia, el último color es dorado, lo que indica un 5% , es decir, el valor de esta resistencia es $510 \pm 25,5 \Omega$.

Leyes de Kirchhoff (voltajes y corrientes)

Para abordar problemas relacionados con circuitos eléctricos, es fundamental identificar el tipo de topología involucrada, como se mencionó previamente. En la figura 4.24, se ilustran los dos tipos más comunes: serie (figura 4.24a) y paralelo (figura 4.24b). Estos conceptos son esenciales para

establecer dos leyes clave que serán fundamentales en la resolución de problemas de este tipo. La primera de ellas es la ley de corrientes, que se enuncia de la siguiente manera:

Teorema 4.2.1 La suma algebraica de todas las corrientes que entran a un nodo es igual a la sumatoria de todas las que salen.

En la figura 4.22 se representa gráficamente lo que significa un nodo, en este caso un punto del circuito donde confluyen más de dos corrientes, el cual sirve como referencia para analizar lo que ocurre con cada corriente de manera independiente, permitiendo calcular eventos específicos dentro de la arquitectura del circuito.

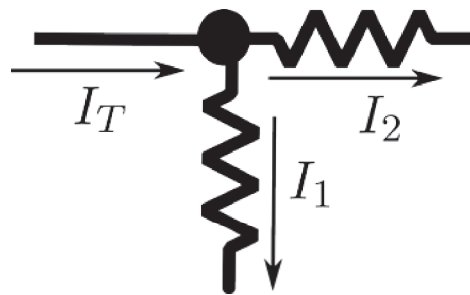


Figura 4.22 Definición de nodo

Expresado en forma de ecuación, este teorema toma la siguiente forma:

$$I_T = \sum_n I_n \tag{4.126}$$

Otro teorema importante por abordar es la ley de voltajes de Kirchhoff, la cual, como se ha mencionado anteriormente, constituye una forma alternativa de enunciar la primera ley de la termodinámica. En esencia, esta ley establece que, en un sistema aislado, como lo es un circuito, la energía eléctrica potencial del sistema se conserva. Esta idea puede expresarse de la siguiente manera:

Teorema 4.2.2 La suma algebraica de los voltajes en una malla cerrada es igual a cero.

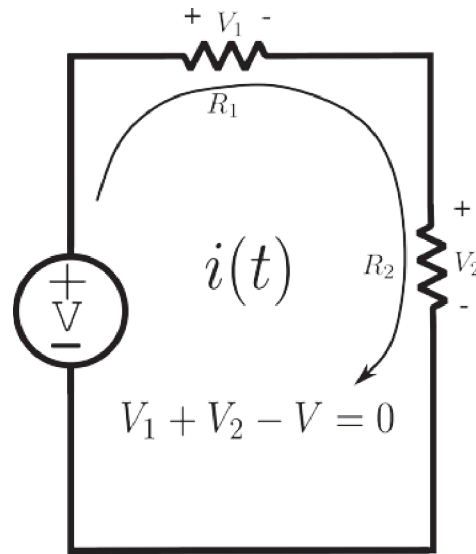


Figura 4.23 Ejemplo ley de voltajes

En la figura 4.23 se muestra un caso particular de lo que se ha planteado. En términos generales, esto se puede escribir de la siguiente manera:

$$V_T - \sum_n V_n = 0 \quad (4.127)$$

Sin embargo, la ecuación 4.127 puede descomponerse en virtud de la ley de Ohm 4.118:

$$V_T - (V_1 + V_2 + \dots + V_n) = IR_T - \sum_n I_n R_i = 0 \quad (4.128)$$

Para el caso particular de la figura 4.23, la ley de voltajes se expresa de la siguiente manera:

$$V = V_1 + V_2 = i(t)R_1 + i(t)R_2 = i(t)(R_1 + R_2) \quad (4.129)$$

Con base en lo anterior, es posible encontrar relaciones que permitan simplificar de forma general ciertos arreglos circuitales. En concreto, se desarrollarán expresiones para la simplificación de circuitos en serie y en paralelo, tal como se muestra en la figura 4.24.

Aplicando la ley de Ohm, es posible encontrar una relación que permita determinar una resistencia equivalente para los circuitos resistivos en serie y en paralelo. Teniendo en cuenta la figura 4.24a y suponiendo que la misma corriente (I) pasa por cada una de las resistencias, la ley de voltajes se podría escribir de la siguiente forma:

$$V_{AB} = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (4.130)$$

Suponiendo que se puede encontrar una resistencia equivalente que abarque todas las demás resistencias dentro del circuito, esto es, $V_{AB} = IR_{eq}$, entonces se tiene:

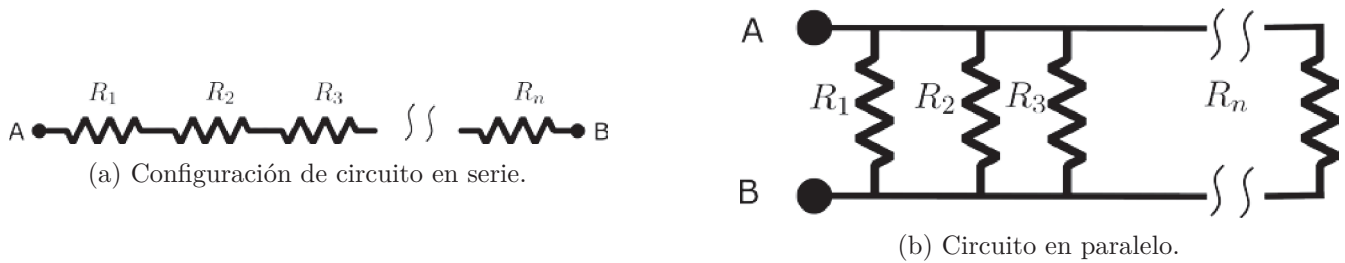


Figura 4.24 Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo

$$IR_{eq} = I(R_1 + R_2 + \dots + R_n) \tag{4.131}$$

$$R_{eq} = \sum_n R_n = R_1 + R_2 + \dots + R_n \tag{4.132}$$

Un proceso similar se puede aplicar en el caso de circuitos en paralelo. Para ello, se utilizará la ley de corrientes en el circuito mostrado en la figura 4.24b. Se asumirá que la corriente de entrada es igual a la suma de las corrientes que atraviesan las resistencias eléctricas, lo que permitirá aplicar la ley de Ohm.

$$I_T = I_1 + I_2 + \dots + I_n \tag{4.133}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\frac{V_{AB}}{R_{eq}} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \dots + \frac{V_n}{R_n} \tag{4.134}$$

Si se considera que el voltaje entre A y B es igual a los voltajes individuales sobre cada una de las resistencias, por la definición de circuitos en paralelo, entonces:

$$\frac{V_{AB}}{R_{eq}} = V_{AB} \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right] \tag{4.135}$$

Por lo tanto, la resistencia equivalente para circuitos en paralelo está dada por:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \tag{4.136}$$

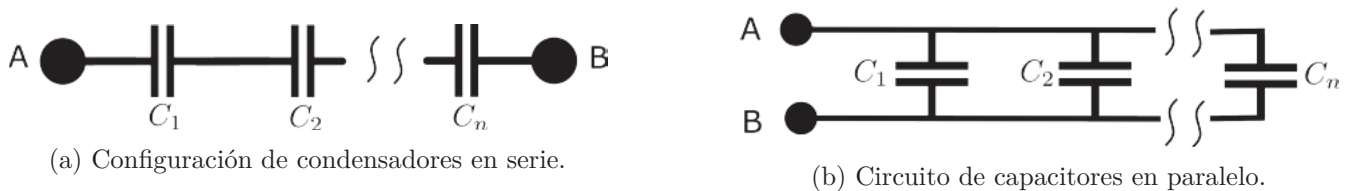


Figura 4.25 Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo

Expresiones similares para la simplificación de circuitos capacitivos y resistivos pueden deducirse siguiendo la misma lógica. Por ejemplo, en el caso de los condensadores (4.25), se tiene una ecuación equivalente a la ley de Ohm, $V = \frac{Q}{C}$, además de que $Q = \int_0^t i(\tau) d\tau$. Por lo tanto, es claro que para un arreglo en serie y paralelo, siguiendo el mismo esquema que para el circuito resistivo, se tiene que:

$$V_{AB} = \frac{1}{C_{eq}} \int_0^t i(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \int_0^t i(\tau) d\tau = \int_0^t i(\tau) d\tau \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (4.137)$$

Esto último en el caso representado en la figura 4.25a, de acuerdo con lo anterior:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (4.138)$$

Esta expresión permite simplificar circuitos capacitivos en serie. De manera análoga, se puede encontrar una ecuación para el caso en el que los condensadores están conectados en paralelo.

$$C_{eq} = \frac{\int_0^t i(\tau) d\tau}{V_{AB}} = \frac{\sum_n \int_0^t i_n(\tau) d\tau}{V_{AB}} \quad (4.139)$$

Lo anterior debido a la aplicación de la ley de corrientes. Asimismo, por definición, $V_{AB} = V_1 = V_2 = \dots = V_n$, por lo cual:

$$C_{eq} = \frac{\int_0^t i_1(\tau) d\tau}{V_1} + \frac{\int_0^t i_2(\tau) d\tau}{V_2} + \dots + \frac{\int_0^t i_n(\tau) d\tau}{V_n} \quad (4.140)$$

Sabiendo que, en general, $C_n = \frac{\int_0^t i_n(\tau) d\tau}{V_n}$, se tiene que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i \quad (4.141)$$

La capacitancia equivalente en circuitos capacitivos conectados en paralelo se obtiene sumando directamente los valores individuales de capacitancia. En contraste, en circuitos conectados en serie, la capacitancia total se calcula sumando los inversos de los valores individuales de capacitancia y luego tomando el inverso del resultado.

Cuando se trata de sistemas con inductancias, la situación es muy similar al caso de circuitos resistivos, dado que la ley de transporte que gobierna esta relación guarda similitud con la ley de Ohm. Esto es:

$$\phi(i) = Li \quad (4.142)$$

En la teoría de circuitos, el flujo magnético, representado como $\phi(i)$, denota la cantidad de líneas de campo magnético por unidad de área. Es análogo al potencial eléctrico y es producido por la presencia de un campo magnético generado por una corriente eléctrica (i) que circula a través de un conductor. Su unidad en el Sistema Internacional (SI) es el Weber (Wb), que equivale a voltios por segundo ($V \cdot s$).

Por otro lado, la inductancia (L) es una medida de la resistencia al cambio de corriente en un circuito. Su unidad en el SI es el Henry (H) y se puede interpretar como la cantidad de trabajo eléctrico necesario por amperio al cuadrado para alterar el flujo normal de corriente eléctrica.

Como se mencionó anteriormente, debido a su similitud con la relación dominante en los circuitos resistivos, queda claro que la simplificación de circuitos inductivos obedece la misma lógica. Por lo tanto, para circuitos en serie y paralelo, como se muestran en la figura 4.26, se tienen las siguientes relaciones.

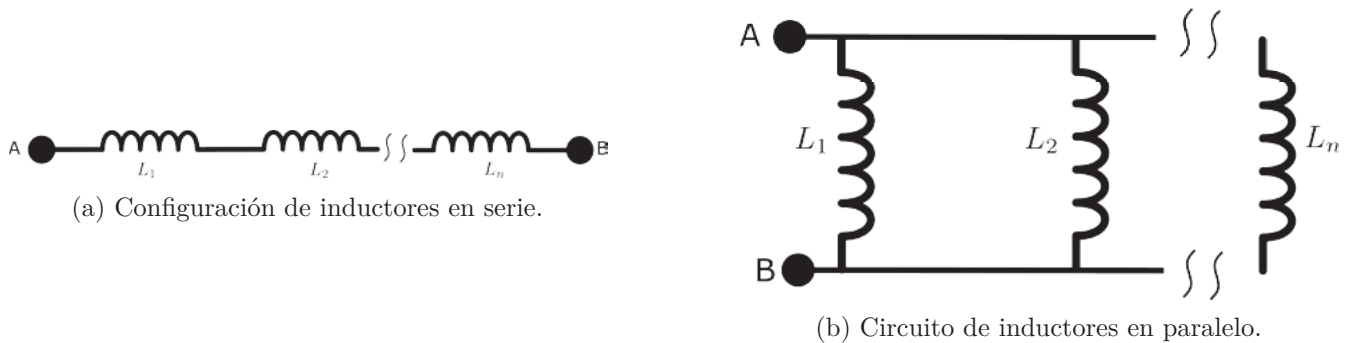


Figura 4.26 Topologías más comunes en teoría de circuitos: Serie y paralelo

En serie:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \tag{4.143}$$

Por su parte, en paralelo.

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \tag{4.144}$$

4.2.6.2 Circuitos DC resistivos

Para el análisis de circuitos en corriente continua (DC), se aplicarán directamente las leyes de corriente y voltaje de Kirchoff a una malla representada en la Figura 4.27. Esto tiene como objetivo simplificar el proceso de análisis del circuito. Además, se utilizará un código en Python que permitirá calcular las corrientes mediante la inversión de la matriz de coeficientes obtenida a partir de las ecuaciones correspondientes a dicha malla.

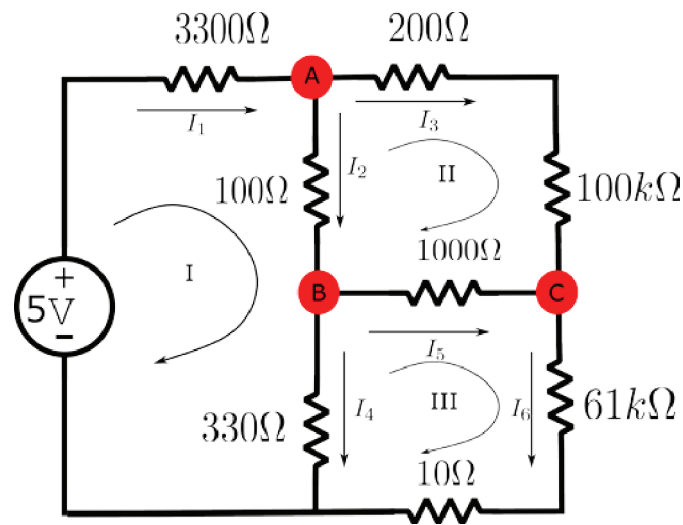


Figura 4.27 Circuito eléctrico resistivo en régimen DC

Lo primero es determinar la ley de corrientes en cada uno de los nodos de la malla 4.27. Para el nodo A:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (4.145)$$

La corriente que entra en este caso es igual a I_1 y debe ser exactamente igual a la suma de las corrientes salientes. Replicando esto para los otros dos nodos B y C, se tiene que:

Nodo B:

$$I_2 = I_5 + I_4 \quad (4.146)$$

Nodo C:

$$I_5 + I_3 = I_6 \quad (4.147)$$

Como se puede observar, un nodo es el punto en la malla donde se encuentran más de dos corrientes entrantes o salientes. A partir de este primer análisis, es evidente que al tener 6 corrientes (incógnitas), se necesitan al menos 6 ecuaciones para que el sistema sea consistente. Por lo tanto, es necesario encontrar otras tres expresiones para resolver esta situación. En este sentido, se utilizará la ley de voltajes, que establece que la suma algebraica de los voltajes ($V = IR$) en una malla cerrada es igual a 0.

Aplicando la ley de voltajes, sobre las mallas etiquetadas como I, II y III:

Malla I:

$$3,3kI_1 + 100I_2 + 330I_4 - 5V = 0 \quad (4.148)$$

Malla II:

$$200I_3 + 100kI_3 - 1kI_5 - 100I_2 = 0 \quad (4.149)$$

Es importante destacar que el signo ^{en} la ecuación se debe al hecho de que se opone al sentido de la corriente establecido. En este caso, se considera el sentido horario como convención, pero es importante tener en cuenta que se obtendría el mismo resultado si se tomara el sentido de la corriente como anti horario.

Malla III:

$$1kI_5 + 61kI_6 + 10I_6 - 330I_4 = 0 \quad (4.150)$$

Reorganizando el sistema de ecuaciones, se tiene finalmente que:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad (4.151)$$

$$I_2 - I_5 - I_4 = 0 \quad (4.152)$$

$$I_5 + I_3 - I_6 = 0 \quad (4.153)$$

$$3,3kI_1 + 100I_2 + 330I_4 = 5 \quad (4.154)$$

$$100,2kI_3 - 1kI_5 - 100I_2 = 0 \quad (4.155)$$

$$1kI_5 + 61,01kI_6 - 330I_4 = 0 \quad (4.156)$$

Para resolver este sistema de ecuaciones de 6x6, se pueden utilizar diversos recursos matemáticos. Sin embargo, en este caso se emplearán herramientas computacionales, específicamente la librería NumPy, para resolverlo. A continuación se muestra el código utilizado:

```
1 import numpy as np
2
3 # Definir la matriz de coeficientes del sistema
4 A = np.array([[1, -1, -1, 0, 0, 0],
5              [0, 1, 0, -1, -1, 0],
6              [0, 0, 1, 0, 1, -1],
7              [3300, 100, 0, 330, 0, 0],
8              [0, -100, 100.2e3, 200, -1000, 0],
9              [0, 0, 0, -330, 1000, 61000]])
10
11 # Definir el vector de constantes
12 B = np.array([0, 0, 0, 5, 0, 0])
13
```

```

14 # Resolver el sistema de ecuaciones
15 X = np.linalg.solve(A, B)
16
17 # Imprimir las soluciones
18 for i, sol in enumerate(X):
19     print(f"I_{i+1} = {sol}")
    
```

Código 4.5 Código para calcular las corrientes en la malla 4.27.

El resultado obtenido es el siguiente: $I_1 = 0,00134$ A, $I_2 = 0,00134$ A, $I_3 = -1,23999 \times 10^{-6}$ A, $I_4 = 0,00134$ A, $I_5 = 8,32029 \times 10^{-6}$ A, $I_6 = 7,0803 \times 10^{-6}$ A. Para obtener estos valores, en el algoritmo se utilizó el método de la matriz inversa, es decir, se resolvió el sistema lineal mediante la siguiente ecuación:

$$I = R^{-1}V \tag{4.157}$$

Se procedió a invertir la matriz de coeficientes, multiplicando los valores de resistencia por el vector columna compuesto por el lado derecho de las ecuaciones presentadas previamente. En el algoritmo, cada posición del arreglo corresponde a una corriente, es decir, $[I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6]$. Así, en la primera fila del arreglo de NumPy, correspondiente a la ecuación 4.151, los coeficientes son $[1, -1, -1, 0, 0, 0]$.

Como se puede verificar, al sustituir estos valores obtenidos en la primera ecuación 4.151, el resultado es aproximadamente cero ($\approx -2,7105 \times 10^{-20}$).

4.2.6.3 Circuitos RLC en régimen DC

La combinación de resistores, capacitores e inductores en régimen DC es un tema central en la teoría de circuitos, debido a sus aplicaciones en osciladores, filtrado de señales y almacenamiento de energía eléctrica. Para comprender estos circuitos, es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales, para las cuales existen diversos métodos y estrategias. En este caso, se utilizará la transformada de Laplace para realizar el análisis de estos circuitos [29]. La ventaja de este método radica en la posibilidad de tratar las ecuaciones diferenciales como ecuaciones algebraicas, al cambiar de dominio. En este libro, se abordará el nivel de profundidad necesario para resolver las ecuaciones integro-diferenciales que surgen en estos sistemas.

Para comenzar, se definirá la transformada de Laplace, la cual es una transformación integral de la forma:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt \tag{4.158}$$

Lo anterior solo es válido en el caso en que $f(t)$ sea integrable en el intervalo $[0, \infty)$ y además sea una función de tipo exponencial (existencia de la transformada), es decir,

$$|f(t)| \leq Ae^{B|t|} \tag{4.159}$$

Otra particularidad es que la variable s permite cambiar del dominio del tiempo (t) al dominio de la frecuencia (ω), ya que $s = \sigma + i\omega$, donde i representa la unidad imaginaria y σ es la parte

real de s . El siguiente ejemplo ilustrará la aplicación de esta poderosa herramienta, para lo cual se evaluará la transformada de la función exponencial $f(t) = e^{\alpha t}$.

Aplicando la definición de la transformada de Laplace de la ecuación 4.158, se obtiene lo siguiente para la función exponencial:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{\alpha t} e^{-st} dt \tag{4.160}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(\alpha-s)t} dt \tag{4.161}$$

Integrando 4.161.

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-(s-\alpha)t}}{s-\alpha} \right|_0^b = \frac{1}{s-\alpha} \lim_{b \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{e^{(s-\alpha)b}} \tag{4.162}$$

De 4.162 queda claro que cuando $b \rightarrow \infty$ entonces $\frac{1}{e^{(s-\alpha)b}} \rightarrow 0$, por tanto.

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha} \tag{4.163}$$

Un procedimiento similar se puede efectuar para todas las funciones que cumplan con la condición 4.159, tal como se retrata en la tabla 4.5.

Tabla 4.5 Principales propiedades de la transformada de Laplace

Propiedad	Transformada de Laplace
Linealidad	$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$
Desplazamiento en el Tiempo	$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s}F(s)$
Desplazamiento en la Frecuencia	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s - a)$
Escalamiento en el Dominio del Tiempo	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
Primera Derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$
n -ésima Derivada	$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integración	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
Teorema del Valor Inicial	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Teorema del Valor Final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Convolución	$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s)$
Constante	$\mathcal{L}\{k\} = \frac{k}{s}$
Exponencial	$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s - a}$
Seno	$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$
Coseno	$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$
Función Hiperbólica \sinh	$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}$
Función Hiperbólica \cosh	$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2}$
Función Polinómica t^n	$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
Función Escalonada $u(t)$	$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$
Función Escalonada Retardada $u(t - a)$	$\mathcal{L}\{u(t - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
Función Delta de Dirac $\delta(t)$	$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

Cabe resaltar que una propiedad importante es la existencia de la transformada inversa de Laplace, la cual puede emplearse para regresar al dominio del tiempo. Esta resulta especialmente útil al resolver ecuaciones diferenciales lineales, que es el uso principal previsto en esta sección, y cuya definición es la siguiente:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{4.164}$$

Por ejemplo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - a}\right\} = e^{at} \tag{4.165}$$

Con lo anterior, es posible resolver un circuito RLC simple. Más adelante, se emplearán el primer y segundo teorema de traslación para incluir el efecto de un interruptor. Es decir, el voltaje comenzará a aplicarse a partir de un cierto tiempo t_0 y el circuito se abrirá en un tiempo t_f . Para ello, se trabajará con el circuito de la figura 4.28.

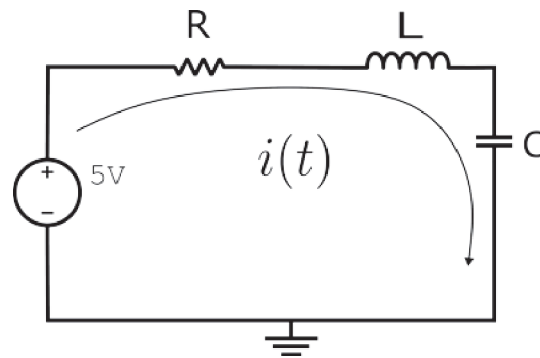


Figura 4.28 Circuito R-L-C en serie

Aplicando ley de voltajes sobre la malla, se tiene lo siguiente.

$$L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = 5 \quad (4.166)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de 4.166 y aplicando la propiedad de linealidad presentada en la tabla se tiene que.

$$L\mathcal{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left\{\int i(t) dt\right\} + R\mathcal{L}\{i(t)\} = 5\mathcal{L}\{1\} \quad (4.167)$$

De izquierda a derecha se aplicaran las siguientes propiedades, primera derivada, derivación, definición y función polinómica.

$$L[sI(s) - I(0)] + \frac{I(s)}{Cs} + RI(s) = \frac{5}{s} \quad (4.168)$$

Teniendo en cuenta que en el instante $t = 0$ no hay corriente, entonces, $I(0) = 0$, por lo tanto, reorganizando la expresión y resolviendo para $I(s)$ se tiene.

$$I(s) \left[\frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} \right] = \frac{5}{s} \quad (4.169)$$

∴

$$I(s) = \frac{5C}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (4.170)$$

El siguiente paso consiste en descomponer la expresión 4.170 mediante fracciones parciales, con el fin de aplicar el criterio de linealidad, pero esta vez a la transformada inversa de Laplace. El objetivo es analizar lo que ocurre en el dominio del tiempo.

En este sentido, la primera acción que debemos realizar con respecto a 4.170 es factorizar el denominador. Para ello, utilizaremos la solución general de la ecuación cuadrática, lo que nos proporciona las siguientes raíces R_i .

$$R_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} \quad (4.171)$$

Haciendo a $\gamma = R_1$ y $\zeta = R_2$, donde R_1, R_2 son las raíces positiva y negativa respectivamente. Por lo anterior, la ecuación 4.170 se puede expresar como sigue:

$$I(s) = \frac{5C}{(s - \gamma)(s - \zeta)} = \frac{A}{s - \gamma} + \frac{B}{s - \zeta} \quad (4.172)$$

De lo anterior se obtiene el siguiente sistema lineal.

$$-A\zeta - \gamma B = 5C \quad (4.173)$$

$$A + B = 0 \quad (4.174)$$

Resolviendo para B:

$$B = \frac{5C}{\zeta - \gamma} \quad (4.175)$$

Reemplazando nuevamente ζ y γ en términos de los parámetros R, L, C.

$$B = -\frac{5LC^2}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \quad (4.176)$$

∴

$$A = \frac{5LC^2}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \quad (4.177)$$

En otras palabras.

$$I(s) = \frac{5LC^2}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \left[\frac{1}{\left(s - \left(\frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}\right)\right)} - \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-RC - \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}\right)\right)} \right] \quad (4.178)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a ambos lados de 4.178 y haciendo uso de la propiedad de linealidad de esta.

$$\mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \frac{5LC^2}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \left[\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}\right)\right)} \right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-RC - \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}\right)\right)} \right\} \right] \quad (4.179)$$

Revisando la tabla de transformadas es evidente que se trata de la función exponencial, esto es.

$$i(t) = \frac{5LC^2}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \left[e^{\frac{-RC + \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}t} - e^{\frac{-RC - \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}t} \right] \quad (4.180)$$

Este resultado puede ajustarse dependiendo de varios factores, todos ellos destacados en la ecuación 4.180. Por ejemplo, si se requiere un valor diferente de voltaje, lo único necesario es modificar el valor señalado por el de interés. Sin embargo, el verdadero interés radica en la expresión que aparece en el discriminante del radical, la cual nos permite inferir el comportamiento del circuito de acuerdo con tres posibilidades:

- Sobre amortiguado

$$(RC)^2 - 4LC > 0 \quad (4.181)$$

- Críticamente amortiguado

$$(RC)^2 - 4LC = 0 \quad (4.182)$$

- Subamortiguado

$$(RC)^2 - 4LC < 0 \quad (4.183)$$

Este tipo de análisis resulta más sencillo si se recurre a una versión simplificada de la expresión 4.180, mediante la manipulación de los exponenciales y considerando que $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, entonces:

$$i(t) = \frac{10LC^2 e^{-\frac{R}{2L}t}}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \sinh\left(\frac{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC}t\right) \quad (4.184)$$

Continuando con este desarrollo, se procede a definir la función escalón unitario. Esta permite simular el comportamiento de un interruptor, ya que activa la función de potencial eléctrico a un tiempo dado, t_0 .

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 \\ 1, & t \geq t_0 \end{cases} \quad (4.185)$$

Este comportamiento se puede apreciar mejor, en la siguiente figura 4.29.

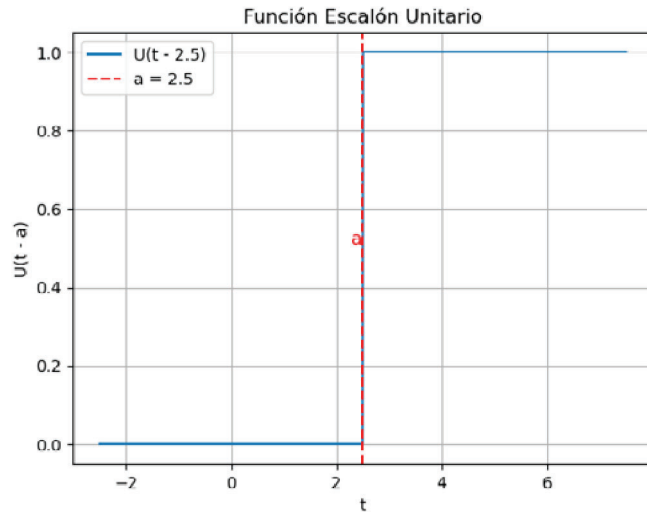


Figura 4.29 Función escalón unitario evaluado en un tiempo $a = 2.5$ s

Claramente, se observa que la función se activa exactamente a los 2.5 segundos, lo que permite crear matemáticamente una alternativa a un interruptor eléctrico. Por ejemplo, si se desea aplicar un voltaje de 12 V al circuito a partir de los 2 segundos, simplemente se multiplica dicho valor por la función escalón unitario, es decir, $12U(t-2)$. A continuación, se muestra un ejemplo de cómo se aplica la transformada de Laplace a este tipo de funciones.

Suponga que se desea modelar un circuito con una función de potencial eléctrico como se muestra en la figura 4.30.

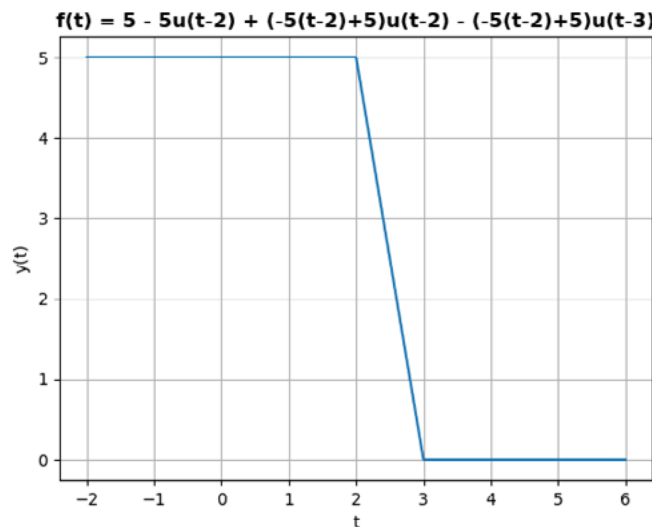


Figura 4.30 Función de potencial eléctrico que simula la activación de un interruptor a los 3 s

Para ello, es necesario aplicar la transformada de Laplace sobre la función $f(t)$ de la figura. Para esto, se empleará la propiedad de desplazamiento en el tiempo, también conocida como el teorema de traslación de la tabla 4.5. Esta propiedad se puede reescribir de la siguiente manera, con el fin de hacer uso del concepto de escalón unitario.

$$\mathcal{L}\{g(t)u(t-t_0)\} = e^{-t_0s} \mathcal{L}\{g(t+t_0)\} \quad (4.186)$$

Este procedimiento también es válido cuando se desea escribir funciones definidas por partes de manera compacta. En este caso, la función en cuestión se puede expresar de la siguiente forma:

$$V(t) = 5 - 5u(t-2) + (-5(t-2) + 5)u(t-2) - (-5(t-2) + 5)u(t-3) \quad (4.187)$$

Simplificando,

$$V(t) = 5 + 10u(t-2) - 5tu(t-2) + 5tu(t-3) - 15u(t-3) \quad (4.188)$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados,

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \mathcal{L}\{5\} + \mathcal{L}\{10u(t-2)\} - \mathcal{L}\{5tu(t-2)\} + \mathcal{L}\{5tu(t-3)\} - \mathcal{L}\{15u(t-3)\} \quad (4.189)$$

Haciendo uso de la propiedad 4.186 se obtiene el cambio de dominio.

$$V(s) = \frac{5}{s} + \frac{10e^{-2s}}{s} - \frac{5e^{-2s}}{s^2} + \frac{5e^{-3s}}{s^2} - \frac{15e^{-3s}}{s} \quad (4.190)$$

Cabe destacar el uso de la transformada de Laplace de una función polinómica en el tercer y cuarto término de la ecuación 4.189. Esta última expresión puede interpretarse como la respuesta en el dominio de la frecuencia de un sistema de apagado temporizado, que abre el circuito después de 2 segundos. Lo anterior, combinado con un circuito R-L-C, generará una respuesta muy particular dependiendo de los valores, como se ilustró anteriormente.

Ejemplo

Se busca determinar la respuesta en el tiempo de un circuito RL que comienza a actuar después de 5 segundos. Supóngase además que el inductor tenía almacenada una corriente de 1 A justo antes de que el interruptor se cerrara.

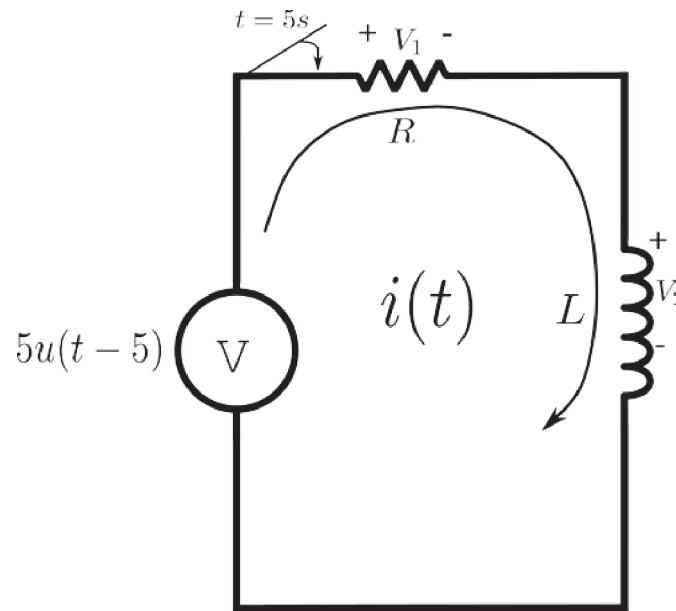


Figura 4.31 Circuito con un interruptor temporizado

Aplicando ley de voltajes sobre la malla 4.31 se tiene:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 5u(t-5) \quad (4.191)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados,

$$\mathcal{L}\{L \frac{di}{dt}\} + \mathcal{L}\{Ri\} = 5\mathcal{L}\{u(t-5)\} \quad (4.192)$$

Recordando en este caso que la corriente almacenada por el inductor de 1 A para este caso es $i(0) = 1$ A.

$$L[si(s) - i(0)] + Ri(s) = \frac{5e^{-5s}}{s} \quad (4.193)$$

$$i(s) = \frac{5e^{-5s}}{L} \frac{1}{s(s + \frac{R}{L})} + \frac{L}{Ls + R} \quad (4.194)$$

Aplicando fracciones parciales al primer miembro del lado derecho de la igualdad,

$$\frac{1}{s(s + \frac{R}{L})} = \frac{L}{Rs} - \frac{L}{R(s + \frac{R}{L})} \quad (4.195)$$

Combinando 4.195 y 4.194.

$$i(s) = \frac{5e^{-5s}}{L} \left[\frac{L}{Rs} - \frac{L}{R(s + \frac{R}{L})} \right] + \frac{L}{Ls + R} \quad (4.196)$$

Aplicando la transformada inversa a ambos lados.

$$\mathcal{L}^{-1}\{i(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5e^{-5s}}{L}\left[\frac{L}{Rs} - \frac{L}{R\left(s + \frac{R}{L}\right)}\right]\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{L}{Ls + R}\right\} \quad (4.197)$$

En virtud de la propiedad de linealidad, teorema de traslación y propiedad de la transformada de una función exponencial, se tiene.

$$i(t) = \frac{5}{R}u(t-5) - \frac{5}{R}e^{-\frac{R}{L}t}u(t-5) + e^{-\frac{R}{L}t} \quad (4.198)$$

Este resultado puede interpretarse de la siguiente manera: los primeros dos términos corresponden al comportamiento del circuito una vez que se activa el interruptor. El inductor se carga y, una vez que se satura, comienza a descargarse siguiendo la ya conocida ley de decaimiento exponencial. El último término representa la descarga del inductor antes de la activación de la fuente de voltaje. Como era de esperarse, mientras la fuente estaba desconectada, el inductor actúa como una fuente de corriente, como se muestra en la figura 4.32.

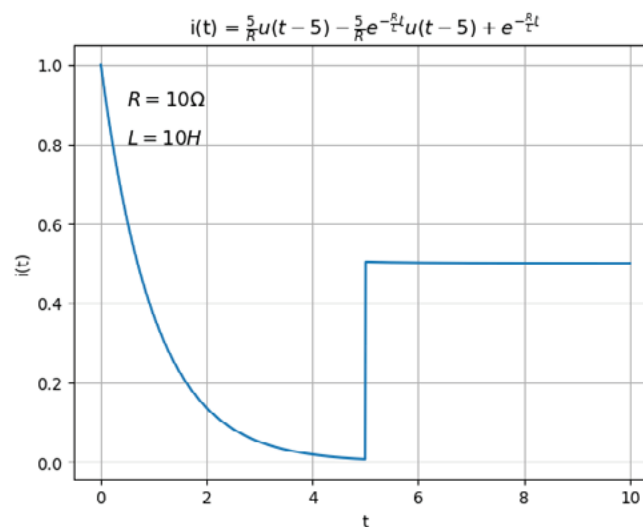


Figura 4.32 Respuesta en el tiempo del circuito del ejemplo

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def unit(t, a):
5     return np.where(t >= a, 1, 0)
6
7
8
9 def custom_function(t):
10    R = 10.0
11    L = 10.0
12    return 5/R*unit(t,5) - 5/R*np.exp(-R/L*t)*unit(t,5) + np.exp(-R/L * t)

```

```

13
14
15 t_values = np.linspace(0,10, 1000)
16
17 # Evalua la Funcion
18 y_values = custom_function(t_values)
19
20
21 plt.plot(t_values, y_values)
22 plt.xlabel('t')
23 plt.ylabel('i(t)')
24 # Agrega valores de R y L dentro de la grafica
25 plt.text(0.5, 0.9, r"$R = 10 \Omega$".format(10), fontsize=12)
26 plt.text(0.5, 0.8, r"$L = 10 H$".format(10), fontsize=12)
27 plt.grid(True)
28 plt.title(r'i=$\frac{5}{R}u(t-5)-\frac{5}{R}e^{-\frac{R}{L}t}u(t-5)$' \
29 r'$+e^{-\frac{R}{L}t}$')
30 plt.show()

```

Código 4.6 Ejemplo de interruptor temporizado 4.32

4.2.6.4 Circuitos RLC en régimen AC

En esta sección, se procederá de manera similar a la anterior, con una salvedad: en este caso, se supondrá que la fuente de voltaje que alimenta el circuito depende del tiempo. Específicamente, y por convención, se tomará $V = A \sin(\omega t)$, donde A es la amplitud de la señal de voltaje y ω es la frecuencia angular de esta, con $\omega = 2\pi f$.

El análisis de este tipo de circuitos en régimen de corriente alterna (AC) suele desarrollarse empleando el concepto de fasor, ya que es posible tratar los elementos capacitivos e inductivos como resistencias mediante la introducción de la impedancia eléctrica, la cual generaliza el concepto de resistencia. A continuación, se presenta la definición de impedancia.

La impedancia eléctrica (Z) es una magnitud compleja que describe la oposición al flujo de corriente en un circuito de corriente alterna (AC). Se define como:

$$Z = R + iX \tag{4.199}$$

donde:

- R es la parte real de la impedancia, que representa la resistencia del circuito.
- X es la parte imaginaria de la impedancia, que depende de los elementos reactivos del circuito, como inductores (L) y capacitores (C).

Para componentes pasivos en un circuito de corriente alterna, las expresiones para X son las siguientes:

Para un inductor:

$$X_L = i\omega L \quad (4.200)$$

Para un capacitor:

$$X_C = \frac{-i}{\omega C} \quad (4.201)$$

La impedancia eléctrica se utiliza en el análisis de circuitos de corriente alterna para relacionar los voltajes y las corrientes complejas, permitiendo el uso de herramientas matemáticas como fasores y números complejos para simplificar los cálculos. Es una magnitud fundamental para comprender el comportamiento de los circuitos en el dominio de la frecuencia y para el diseño de filtros, redes y sistemas electrónicos en general.

Dicho lo anterior, en este momento se centrará la atención en resolver un circuito RLC utilizando la transformada de Laplace en combinación con Python. Para llevar a cabo este proceso, se considerará el circuito que se muestra en la figura 4.28. La fuente de voltaje está definida como $V = 120\text{sen}(120\pi t)$, mientras que los valores de resistencia, capacitancia e inductancia son 100Ω , $1\mu\text{F}$ y 1mH , respectivamente.

Aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t)dt + Ri = V_0\text{sen}(\omega t) \quad (4.202)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados,

$$LsI(s) + \frac{I(s)}{Cs} + RI(s) = V_0\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.203)$$

Organizando la expresión 4.203 y resolviendo para $I(s)$.

$$I(s) = \frac{V_0\omega Cs}{(s^2 + \omega^2)(s - R_1)(s - R_2)} \quad (4.204)$$

Donde R_1, R_2 son:

$$R = \frac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}}{2LC} \quad (4.205)$$

La ecuación 4.204 puede reescribirse de la siguiente forma haciendo uso de fracciones parciales.

$$i(s) = \frac{As + B}{s^2 + \omega^2} + \frac{D}{s - R_1} + \frac{E}{s - R_2} \quad (4.206)$$

Donde A, B, D, E, son constantes por hallar. Como se mencionó anteriormente, se va a utilizar Python para este fin haciendo uso del código presentado a continuación.

```

1 import sympy as sp
2 import numpy as np
3 import cmath
4
5 def solve_quadratic_eq(L, C, R):
6     # Determina el discriminante
7     discriminant = cmath.sqrt((R ** 2) - (4 * L * C))
8
9     # Calcula las raices
10    root1 = (-R + discriminant) / (2 * L)
11    root2 = (-R - discriminant) / (2 * L)
12
13    return root1, root2
14
15
16 L = 1.0e-3 #Inductancia
17 C = 1.0e-6 #Capacitancia
18 R = 200.0 # Resistencia
19 root1, root2 = solve_quadratic_eq(L, C, R)
20 print("Root 1:", root1)
21 print("Root 2:", root2)
22
23 # Definir simbolos
24 A, B, C, D = sp.symbols('A B C D')
25 R1 = root1
26 R2 = root2
27 w = 120 * np.pi
28 V = 120 # Amplitud Voltaje
29 Co = 1e-6 # Capacitancia
30
31 # Define the system of equations
32 eq1 = A + D + E
33 eq2 = -A * (R1+R2) +B - D * R2 - E * R1
34 eq3 = A * R1 * R2 - B * (R1+R2) + w**2 *D + w**2 * E - V * w * Co
35 eq4 = B * R1 * R2 - D * w * R2 - E * R1 * w ** 2
36 # Solucionar el sistema de E.L
37 solution = sp.solve((eq1, eq2, eq3, eq4), (A, B, C, D))
38 # Tome como cero cualquier solucion < 1x10^-12
39 print("Solution:")
40 print(solution)

```

Código 4.7 Solución del sistema lineal de ecuaciones de forma simbólica

Para este caso el sistema lineal de ecuaciones introducido al código en Python fueron las siguientes:

$$A + D + E = 0 \quad (4.207)$$

$$-A[R_1 + R_2] + B - DR_2 - ER_1 = 0 \quad (4.208)$$

$$AR_1R_2 - B[R_1 + R_2] + \omega^2D + \omega^2E = V_0\omega C \quad (4.209)$$

$$BR_1R_2 - D\omega^2R_2 - ER_1\omega^2 = 0 \quad (4.210)$$

La constante C hace referencia a la capacitancia no a una constante de las fracciones parciales.

Haciendo uso del algoritmo se determinan las dos raíces y el valor de cada una de las constantes del sistema planteado, en este caso.

$R_1 = -5 \times 10^{-9}$, $R_2 = -200 \times 10^3$, $A = -1,13 \times 10^{-12}$, $B = 2,26 \times 10^{-7}$, $D = -3 \times 10^{-18}$, $E = 1,13 \times 10^{-12}$. Por lo anterior, la expresión 4.206 se puede escribir así:

$$I(s) = \frac{-1,13 \times 10^{-12}s}{s^2 + \omega^2} + \frac{2,26 \times 10^{-7}}{s^2 + \omega^2} + \frac{1,13 \times 10^{-12}}{s - R_2} \quad (4.211)$$

En esta ecuación se suprimió el valor de D , debido a su factor de escala, el cual está por debajo de 10^{-12} . Para fines prácticos, esta es una cantidad extremadamente compleja de medir y cuyo aporte general al comportamiento de la corriente en el tiempo es despreciable.

Por lo tanto, al aplicar la transformada inversa de Laplace, el resultado es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = & -1,13 \times 10^{-12} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right\} \\ & + \frac{2,26 \times 10^{-7}}{\omega} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right\} + 1,13 \times 10^{-12} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - R_2}\right\} \end{aligned} \quad (4.212)$$

En el segundo término de la derecha de 4.212, se multiplicó y dividió por la frecuencia angular con el fin de que esté acorde a la propiedad correspondiente a la transformada de la función seno.

Aplicando la transformada inversa se obtendría finalmente el comportamiento de la corriente en el tiempo.

$$i(t) = -1,13 \times 10^{-12} \cos(120\pi t) + 6 \times 10^{-10} \text{sen}(120\pi t) + 1,13 \times 10^{-12} e^{-200 \times 10^3 t} A \quad (4.213)$$

4.3 Campo magnético

El concepto de magnetismo, aunque puede parecer más intuitivo que el de carga eléctrica debido a que la mayoría de las personas han interactuado de alguna manera con algún tipo de imán, no es el caso desde un punto de vista físico. La explicación de cómo funciona dista mucho de cualquier interpretación clásica de la física. Sin embargo, desde un enfoque descriptivo, es posible abordar este fenómeno mediante las ecuaciones de Maxwell. En términos generales, el fundamento del magnetismo está en el comportamiento de los electrones en los átomos. Una propiedad crucial en este sentido es el momento angular intrínseco, también conocido como espín, que para los electrones puede tener valores de $+1/2$ y $-1/2$. Este espín es responsable de crear el momento magnético, es decir, genera el efecto de la fuerza magnética y su correspondiente orientación Norte-Sur.

Otra propiedad de gran importancia es la interacción de intercambio, la cual desempeña un papel fundamental en la generación del intrigante y poderoso ferromagnetismo. En este fenómeno, los espines de los electrones se alinean debido a la influencia del principio de exclusión de Pauli, lo que refuerza el alineamiento magnético a nivel global y produce el efecto que resulta tan evidente. Es precisamente esta forma de alineación la que permite explicar los diversos tipos de magnetismo, como el paramagnetismo, el diamagnetismo y el mencionado ferromagnetismo.

El paramagnetismo guarda cierta similitud con el ferromagnetismo, aunque su intensidad es considerablemente más débil. Esto se debe a la presencia de electrones con espines no emparejados en el último nivel de energía. Esta particularidad provoca una atracción leve hacia un campo magnético externo. Por otro lado, el diamagnetismo es un efecto mucho más común y surge como resultado de la interacción entre un campo magnético externo y electrones con espines apareados. En este caso, esta interacción genera una corriente eléctrica que se opone al campo magnético aplicado, lo que a su vez da lugar a la aparición de un campo magnético repulsivo. En otras palabras, los materiales diamagnéticos resisten la influencia de un campo magnético externo que actúa sobre ellos [30].

Un parámetro fundamental en el estudio del magnetismo es la permeabilidad magnética, la cual describe la capacidad de un material para responder a un campo magnético externo. Esta propiedad cuantifica la densidad de dipolos magnéticos, ya sean permanentes o inducidos temporalmente, que se generan dentro del material cuando se encuentra bajo la influencia de dicho campo. La permeabilidad magnética también puede definirse en términos del campo magnético \vec{H} , medido en amperios por metro (A/m), y del vector de inducción magnética \vec{B} , que representa el flujo magnético en teslas (T) o weber por metro cuadrado (Wb/m²), entendido este último como la cantidad de líneas de campo por unidad de área. Por lo anterior:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{4.214}$$

Es de destacar que una de las constantes universales en física es precisamente la permeabilidad magnética del vacío, la cual está definida como

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2} \tag{4.215}$$

A continuación se presentan en la tabla 4.6 algunos valores típicos de la permeabilidad magnética de diferentes materiales ⁴.

4.3.1 Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart, descubierta por Felix Savart y Jean-Baptiste Biot en 1820, establece la relación entre la corriente eléctrica que circula a través de un conductor y el campo magnético inducido por esta. Dicha relación se puede calcular a partir de la definición de un elemento diferencial de corriente y el ángulo α formado por este y un vector posición \vec{R} , dirigido hacia un observador O , cuya influencia disminuye con el cuadrado de la magnitud del mencionado vector

⁴ $1 \frac{H}{m} = 1 \frac{N}{A^2}$

Tabla 4.6 Valores de permeabilidad magnética para varios materiales [2]

Material	Permeabilidad Magnética (μ)
Aire o vacío	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Hierro (puro)	$5 \times 10^{-3} - 1$ H/m
Acero al silicio	7×10^{-3} H/m
Ferrita	2×10^{-3} H/m
Níquel	$6 \times 10^{-4} - 9 \times 10^{-4}$ H/m

\vec{R} . En otras palabras:

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}dl \sin(\alpha)}{4\pi R^2} \tag{4.216}$$

Sin embargo, considerando la definición del producto cruz, es decir, $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\alpha) \hat{e}_n$, donde \hat{e}_n es un vector unitario ortogonal tanto a \vec{a} como a \vec{b} , y teniendo en cuenta la definición de vector unitario $\hat{e}_r = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, se puede obtener la siguiente relación para la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \vec{R}}{4\pi \|\vec{R}\|^3} \tag{4.217}$$

En la figura 4.33, se aprecia un sistema simple en el que se puede aplicar este principio. Se trata de un filamento a través del cual circula una corriente I , generando un campo magnético \vec{H} a su alrededor. En dicha figura, el punto negro indica el lugar donde las líneas del campo magnético salen del plano (fuera de la hoja), mientras que la X señala donde estas entran.

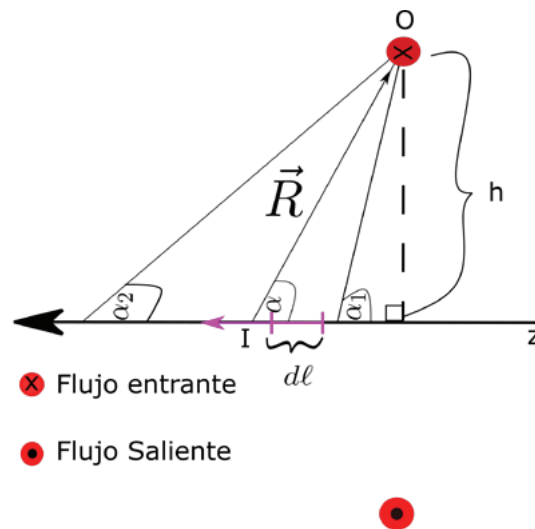


Figura 4.33 Campo magnético asociado a un elemento diferencial de corriente eléctrica

Para resolver esta situación se recurrirá a la expresión 4.216 identificando cada uno de los términos presentes allí. Sin ninguna predilección en especial, se comenzara por identificar dl que es el diferencial de línea en el eje z , ósea $dl = dz$, ahora el turno es de $\|\vec{R}\|$, el cual por definición seria la

distancia Euclidiana en términos h y z esto es $||\vec{R}'|| = \sqrt{h^2 + z^2}$. Es de resaltar para aquellos que aún no se han percatado, que el sistema coordenado elegido es el cilíndrico, en relación con el tipo de simetría que presenta este sistema, como se mencionó anteriormente el flujo entra y sale de la hoja de papel, por lo cual si la corriente se desplaza en la dirección z y el observador se encuentra en la dirección \hat{e}_ρ , por definición, tenemos que la dirección de estas líneas de flujo es el eje \hat{e}_ϕ , siguiendo la lógica de la regla de la mano derecha, con el pulgar apuntando hacia la corriente y los dedos extendidos hacia el observador siguiendo la trayectoria de (\vec{R}) . Además, Tenga en cuenta que en este caso h y ρ hacen referencia a la misma distancia.

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I} \text{sen}(\alpha) dz}{4\pi(h^2 + z^2)} \tag{4.218}$$

Pero de la figura se puede inferir que, $\text{sen}(\alpha) = \frac{h}{||\vec{R}'||} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + z^2}}$, por lo cual.

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I} h dz}{4\pi(h^2 + z^2)^{3/2}} \tag{4.219}$$

Con el fin de resolver esta ecuación, tengamos en cuenta que cuando $z = 0$ el campo magnético asociado aun es muy tenue, tal que $H \rightarrow 0$ es decir no hay acumulación de efectos magnéticos.

Lo que deja, lo siguiente:

$$\int_0^H d\vec{H} = \int_0^z \frac{\vec{I} h dz}{4\pi(h^2 + z^2)^{3/2}} \rightarrow \vec{H} = \int_0^z \frac{\vec{I} h dz}{4\pi(h^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_\phi \tag{4.220}$$

Teniendo en cuenta que $\cot(\theta) = \frac{z}{h}$, entonces, $dz = -\rho C \text{sc}^2(\theta) d\theta$:

$$\vec{H} = -\frac{\vec{I} h^2}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{C \text{sc}^2(\theta) d\theta}{(h^2 + h^2 \text{Cot}^2(\theta))^{3/2}} \tag{4.221}$$

Teniendo en cuenta que $\text{Cot}^2(\theta) + 1 = \text{Csc}^2(\theta)$ y simplificando 4.221 se tiene lo siguiente.

$$\vec{H} = -\frac{\vec{I} h^2}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{C \text{sc}^2(\theta) d\theta}{h^3 C \text{sc}^3(\theta)} = -\frac{\vec{I}}{4\pi h} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \text{sen}(\theta) d\theta = \frac{\vec{I}}{4\pi h} \cos(\theta) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} \tag{4.222}$$

Por lo tanto,

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}}{4\pi h} (\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)) \hat{e}_\phi \tag{4.223}$$

En el caso puntual en el cual $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ y $\alpha_2 = 0$, esto último cuando $z \rightarrow \infty$ por lo cual.

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi h} \hat{e}_\phi \tag{4.224}$$

Así mismo, si los ángulos α_1, α_2 tienden a $-\infty$ y ∞ respectivamente, entonces la expresión 4.223 queda de la siguiente forma:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi h} \hat{e}_\phi \tag{4.225}$$

Este resultado surge del siguiente análisis, cuando $z_1 \rightarrow -\infty$ el angulo $\alpha_1 \rightarrow \pi$, mientras que $z_2 \rightarrow \infty$, entonces $\alpha_2 = 0$.

4.3.1.1 Campo magnético de una espira circular

De acuerdo a la figura 4.34 se tiene que el vector \vec{R} es el vector distancia entre el elemento diferencial de corriente $\vec{I}d\ell$ y el punto de interés P , el cual se puede obtener de la siguiente manera:

$$\vec{R} = (0, 0, h) - (\rho, 0, 0) = -\rho\hat{e}_\rho + h\hat{e}_z \quad (4.226)$$

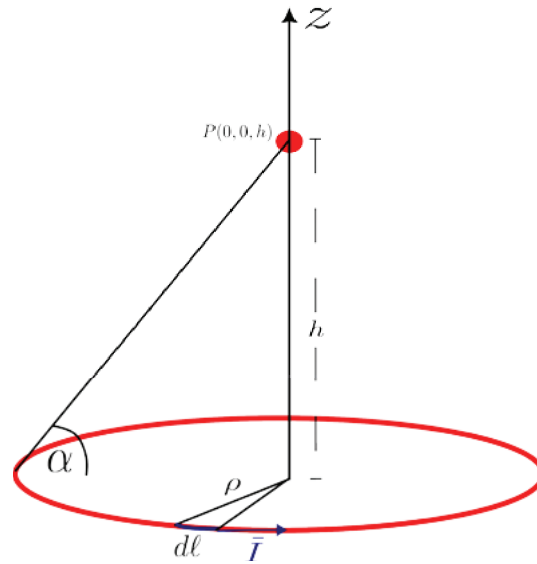


Figura 4.34 Campo magnético asociado a una espira circular

Teniendo en cuenta que $\vec{I}d\ell = I\rho d\phi\hat{e}_\phi$ entonces el producto cruz $\vec{I}d\ell \times \vec{R}$ se puede calcular de la siguiente forma:

$$(\vec{I}d\ell \times \vec{R})^i = \varepsilon_{ijk}I d\ell^j R^k = Id\ell h\rho d\phi\hat{e}_\rho + Id\ell\rho^2 d\phi\hat{e}_z \quad (4.227)$$

Por ejemplo, el resultado planteado en 4.227 para la coordenada ρ surge de aplicar lo siguiente.

$$(\vec{I}d\ell \times \vec{R})^{(1)} = \varepsilon_{123}I d\ell^{(2)}R^{(3)} + \varepsilon_{132}I d\ell^{(3)}R^{(2)} = Id\ell\rho h d\phi\hat{e}_\rho \quad (4.228)$$

Lo anterior de notar que la componente 3 del vector $I d\ell$ es cero, de allí el resultado mostrado, la otra componente se puede calcular de la misma manera (verificar).

De lo anterior, se tiene que el campo magnético de una espira circular se puede escribir de la siguiente forma.

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}\rho h d\phi}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}\hat{e}_\rho + \frac{\vec{I}\rho^2 d\phi}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}}\hat{e}_z \quad (4.229)$$

El termino asociado a la coordenada ρ se anula debido a la simetría de este sistema, es decir, cada componente del campo magnético en una dirección tiene una contraparte, por lo tanto, sus componentes vectoriales se cancelan.

Integrando a ambos lados, el campo magnético producido es el siguiente.

$$\vec{H} = \frac{\vec{I}\rho^2}{4\pi[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi = \boxed{\frac{\vec{I}\rho^2}{2[\rho^2 + h^2]^{3/2}} \hat{e}_z} \quad (4.230)$$

4.3.1.2 Campo magnético en un solenoide

Para encontrar el campo magnético debido a un solenoide compuesto por un número infinito de espiras se supondrá que entre estas hay un número específico de diferenciales de distancia en la dirección de z , es decir, que la densidad de espiras es constante e igual al número de estas dividido entre la longitud total del sistema, esto es, $d\ell = ndz$ donde $n = \frac{1}{\ell}$, esto último se hace para aproximar un sistema discreto de espiras a un sistema continuo que pueda ser integrado.

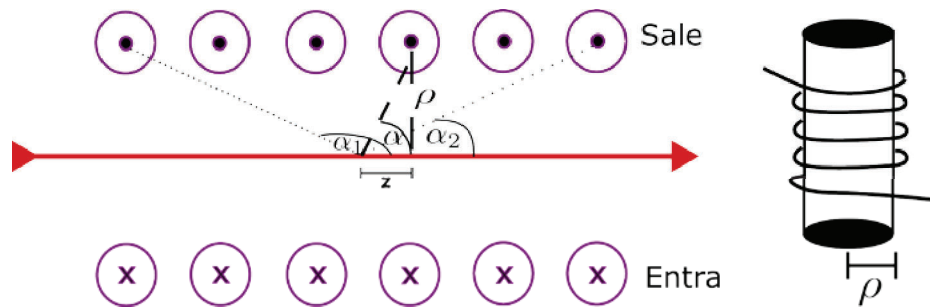


Figura 4.35 Campo magnético producido por un solenoide

Partiendo de lo anterior y teniendo en cuenta la expresión encontrada para una espira circular 4.230 se puede determinar que el diferencial de campo magnético en la dirección z , está dado por:

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}\rho^2 d\ell}{2(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{e}_z \quad (4.231)$$

Haciendo el cambio $d\ell = ndz$ y teniendo en cuenta que $\tan(\alpha) = \frac{\rho}{z}$, entonces el campo magnético se puede representar como sigue:

$$d\vec{H} = \frac{\vec{I}\rho^2 n}{2} \int \frac{dz}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.232)$$

Haciendo la sustitución $z = \rho \cot(\alpha)$ y $dz = -\rho \csc^2(\alpha) d\alpha$ implica que la expresión 4.232 toma la siguiente forma.

$$\vec{H} = \frac{-\vec{I}\rho^3 n}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\csc^2(\alpha) d\alpha}{[\rho^2 + \rho^2 \cot^2(\alpha)]^{3/2}} \quad (4.233)$$

Simplificando

$$\vec{H} = \frac{-\vec{I}\rho^3 n}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\csc^2(\alpha) d\alpha}{\rho^3 \csc^3(\alpha)} = \frac{-In}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sen(\alpha) d\alpha \quad (4.234)$$

∴

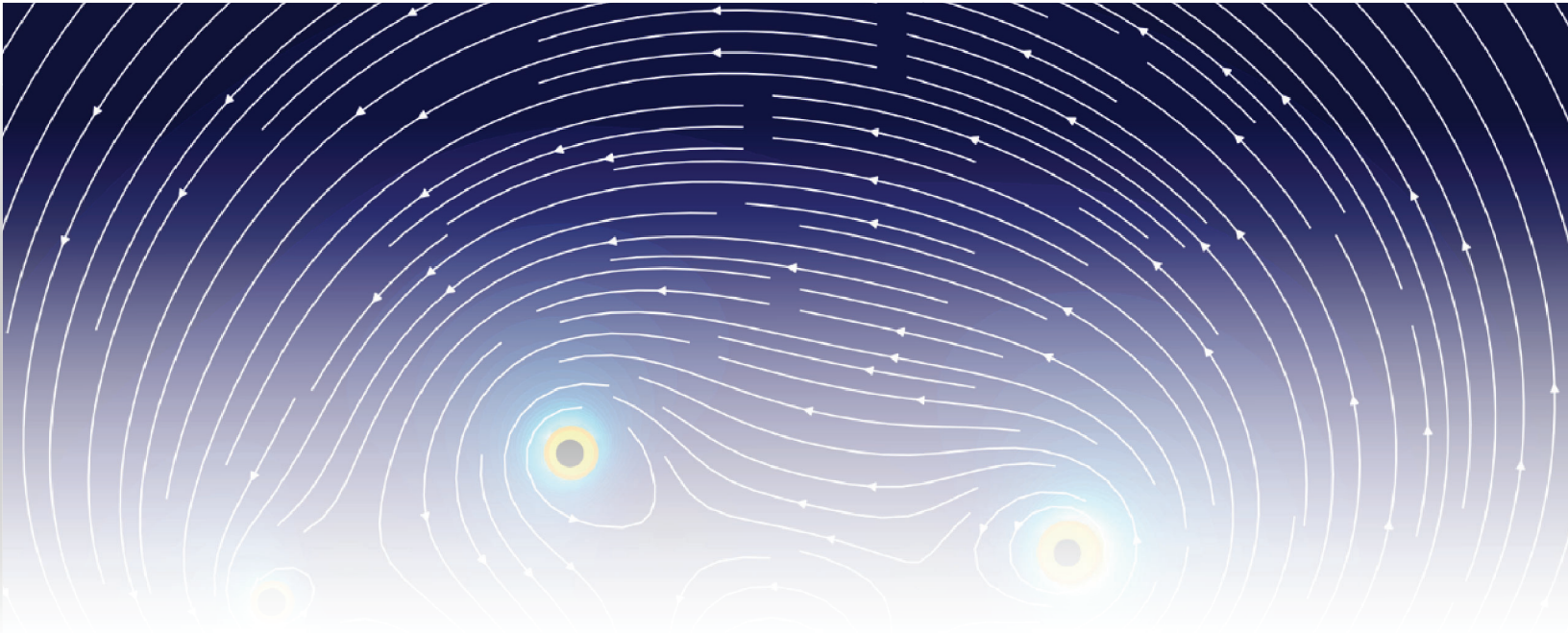
$$\vec{H} = \frac{\vec{I}n}{2} [\cos(\alpha_2) - \cos(\alpha_1)] \hat{e}_z \quad (4.235)$$

Teniendo como referencia el centro de la figura 4.35, en la medida que se incrementa la distancia tanto a izquierda como a derecha, esto es, $z = [-\infty; \infty]$ entonces α_1, α_2 tienden a π y 0 respectivamente, por lo tanto la expresión 4.235 queda de la siguiente forma:

$$\vec{H} = \vec{I}n \hat{e}_z = \boxed{\frac{\vec{I}N}{\ell} \hat{e}_z} \quad (4.236)$$

4.3.2 Problemas

1. Calcule el campo eléctrico generado por un disco a una distancia equivalente al doble de su diámetro. Estime la densidad de carga superficial considerando que la fuerza que experimenta un electrón a una distancia de 1 m es de 30 N. Se conoce que la carga del electrón es $1,602 \times 10^{-19}$ C y la permitividad del vacío es $8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$.
2. Un electrón parte desde el reposo y es acelerado por la acción de un anillo cargado. Determine la densidad de carga lineal del anillo, sabiendo que el electrón colisiona elásticamente con un protón en reposo, al cual le transfiere una velocidad de 300 m/s. El tiempo transcurrido desde que el electrón comienza su movimiento hasta el momento de la colisión es de 10 ns. Estime la distancia entre el protón y el electrón.
3. Se desea diseñar un dispositivo capaz de generar un campo magnético de 1 T. Calcule la corriente necesaria para lograrlo y compare los resultados obtenidos al emplear hierro o cobalto como material del solenoide. Suponga un número de espiras a elección, considerando que el diámetro del alambre utilizado es de 2.5 mm.
4. Estime el campo magnético que se percibiría dentro de una vivienda si una línea de alta tensión pasa frente a ella, desde la acera más próxima. Suponga que por dicha línea circula una corriente de 100 A y que esta puede modelarse como un conductor rectilíneo de longitud infinita. Para sustentar la estimación, utilice Google Maps (no imágenes) para determinar la distancia aproximada entre la vivienda y la acera más cercana.



5. Ondas

Las ondas pueden clasificarse de acuerdo con su origen. Algunas surgen a partir de fluctuaciones en el campo electromagnético, generando ondas electromagnéticas; otras se deben a perturbaciones en sistemas físicos materiales, dando lugar a ondas mecánicas. En este capítulo, se explorarán ambas clases desde dos enfoques complementarios.

Primero, se examinarán las ondas mecánicas, iniciando con el análisis de las ecuaciones fundamentales asociadas al movimiento armónico simple. Este estudio incluirá el caso de sistemas masa-resorte, destacando la analogía existente entre ambos.

Posteriormente, se abordará la propagación de ondas electromagnéticas en el vacío, utilizando las ecuaciones de Maxwell como punto de partida para derivar la correspondiente ecuación de onda. El capítulo concluirá con una revisión de aplicaciones relevantes de estos fenómenos, haciendo énfasis en su papel dentro del campo de la óptica.¹

5.1 Ondas mecánicas y movimiento armónico simple

En esta sección se abordará el problema del movimiento armónico simple (MAS) partiendo del esquema de la figura 5.1, para posteriormente definir una serie de parámetros fundamentales en el estudio de las ondas de manera general.

¹La imagen de Thomas Young fue tomada sin modificaciones de: <http://rstb.royalsocietypublishing.org/content/370/1666/20140308> ©

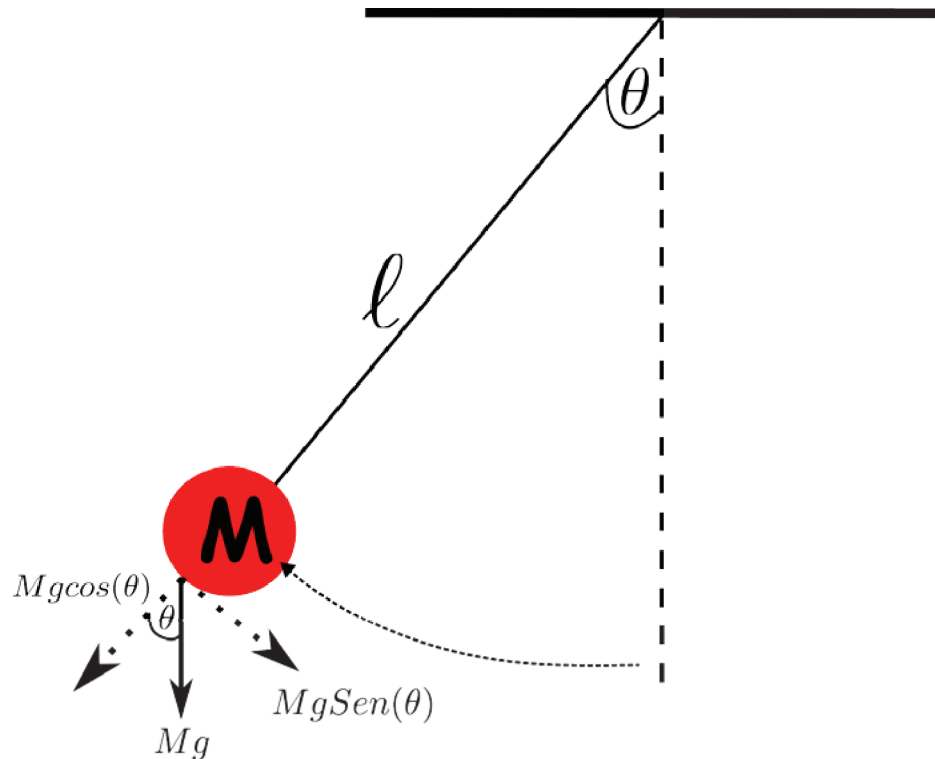


Figura 5.1 Esquema de un péndulo simple

Del esquema se puede apreciar que la simetría del problema es más simple si se analiza desde la perspectiva de las coordenadas cilíndricas en el plano $\rho - \phi$, o en este caso $\theta - \rho$, por lo cual la sumatoria de fuerzas en el eje θ arroja lo siguiente:

$$\sum F_{\theta} : Mg \sin(\theta) = Ma \tag{5.1}$$

Esto último, dado que el péndulo está restringido a moverse únicamente en el eje θ , hace que su desplazamiento $s = \ell\theta$ convierta la ecuación 5.1 en la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) \tag{5.2}$$

Recordar que $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

Para la solución de 5.2 se puede recurrir a la siguiente sustitución con el fin de reducir el orden de la E.D., $p = \frac{d\theta}{dt}$, por lo cual $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = p \frac{dp}{d\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$:

$$p \frac{dp}{d\theta} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta) \tag{5.3}$$

Separando variables:

$$\int p dp = -\frac{g}{\ell} \int \sin(\theta) d\theta \quad (5.4)$$

Integrando ambos lados:

$$\frac{p^2}{2} = -\frac{g}{\ell} \cos(\theta) + C_1 \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta la sustitución inicial:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{g}{\ell} \cos(\theta) + C_1 \quad (5.6)$$

Aplicando separación de variables nuevamente:

$$\int dt = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2g}{\ell} \cos(\theta) + C_1}} \quad (5.7)$$

A 5.7 se le conoce como una integral elíptica incompleta de primer orden y solo aplica en el caso específico cuando al péndulo se le da un fuerte impulso inicial, tal que su ángulo inicial supere los $\frac{\pi}{12}$ rad aproximadamente [31]. Siguiendo esta línea de pensamiento, si se toma la aproximación de ángulo pequeño, esto es $\sin(\theta) \approx \theta$, entonces la ecuación diferencial 5.2 toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \quad (5.8)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria homogénea de orden 2, que tiene una solución más simple en comparación con el caso señalado anteriormente. Para ello, se soluciona la ecuación de índices, como sigue:

$$\lambda^2 + \frac{g}{\ell} = 0 \quad (5.9)$$

5.9 tiene solución únicamente en el dominio de los números complejos, por lo cual la solución es de la forma:

$$\theta(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right) \quad (5.10)$$

Las condiciones iniciales se establecen según los siguientes criterios físicos. Inicialmente, el sistema se encuentra con un pequeño ángulo inicial $\theta(0) = \theta_0$ y cuya velocidad inicial es 0 también, esto es, $\dot{\theta}(0) = 0$, por lo cual:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) \quad (5.11)$$

Al término $\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ se le conoce como frecuencia o velocidad angular, y representa el cambio en el tiempo de la posición del péndulo con respecto al ángulo, es decir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (5.12)$$

De 5.12 se desprenden los siguientes conceptos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (5.13)$$

A esta última expresión se le conoce como frecuencia, y su unidad fundamental es el hertz (Hz) o $\frac{1}{s}$. En el caso de la frecuencia angular, se expresa en $\frac{rad}{s}$; de ahí el factor 2π , que realiza la conversión a unidades angulares (radianes). La frecuencia se puede interpretar como la cantidad de eventos por unidad de tiempo; en este caso, el número de veces que pasa por un punto específico en un tiempo determinado.

Otro concepto importante relacionado con el movimiento pendular es el periodo, es decir, el tiempo (s) que le toma al péndulo completar una oscilación o, en otras palabras, volver al sitio de partida y el cual se puede estimar de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (5.14)$$

De lo anterior es fácil notar la relación que existe entre cada uno de estos parámetros, esto es:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.15)$$

Los códigos en Python presentados a continuación permiten modelar el péndulo simple. El primero resuelve la ecuación diferencial planteada anteriormente, es decir, 5.8, de forma simbólica. El segundo crea una animación de este sistema, donde se pueden modificar los parámetros para visualizar el efecto de los mismos.

```
1 import sympy as sp
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import matplotlib.animation as animation
5
```

```

6 # Define symbols
7 t, g, l, theta_0 = sp.symbols('t g l theta_0')
8 theta = sp.Function('theta', real=True)(t)
9
10 # Define the differential equation
11 eq = sp.diff(theta, t, t) + (g / l) * theta
12
13 # Define initial conditions
14 initial_conditions={theta.subs(t,0):theta_0, sp.diff(theta, \
15 t).subs(t,0):0}
16
17 # Solve the differential equation
18 sol = sp.dsolve(eq, theta, ics=initial_conditions)
19
20 # Extract the solution
21 theta_sol = sol.rhs
22
23 # Convert the symbolic solution to a numerical function
24 theta_func=sp.lambdify(t, theta_sol.subs({g:9.8, l:1 \
25 , theta_0:np.radians(45)}), 'numpy')
26
27 # Time values
28 time_values = np.linspace(0, 2*np.pi*np.sqrt(1/9.8), 1000)
29
30 # Plot the solution
31 plt.text(0.5, 0.7, r'Analytic Solution: ', fontsize=12, color='blue')
32 plt.text(0.5,0.5, r'\$\theta(t)=\theta_0\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$',
33 fontsize=12, color='blue')
34 plt.plot(time_values, theta_func(time_values))
35
36 plt.xlabel('Tiempo (s)')
37 plt.ylabel(r'\$\theta$ (rad)')
38 plt.grid()
39 plt.title('Simple Pendulum')
40 plt.legend()
41 plt.show()
42 sp.pprint(theta_sol)

```

Código 5.1 Modelo de péndulo simple usando sympy

```

1 from matplotlib import rc
2 rc('animation', html='jshtml')
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import sympy as sp
6 import matplotlib.animation as animation
7
8
9
10 # Enable inline plotting in Colab
11 %matplotlib inline
12
13 # Constants
14 g = 9.8 # Acceleration due to gravity (m/s^2)
15 l = 1.0 # Length of the pendulum (m)

```

```

16 theta_0_deg = 45 # Initial angle in degrees
17 theta_0 = np.radians(theta_0_deg) # Convert to radians
18
19 # Time parameters
20 t_max = 10 # Total simulation time (s)
21 dt = 0.05 # Time step (s)
22 t_values = np.arange(0, t_max, dt)
23
24 # Symbolic expression for the analytical solution
25 t, theta = sp.symbols('t theta')
26 theta_analytical = theta_0 * sp.cos(sp.sqrt(g / l) * t)
27
28 # Convert the symbolic solution to a numerical function
29 theta_func=sp.lambdify(t, theta_analytical.subs({g:9.8, l:1, \
30 theta_0:theta_0}), 'numpy')
31
32 # Function to update the plot in each animation frame
33 def update(frame):
34     time = t_values[frame]
35     angle = theta_func(time)
36
37     # Update the pendulum line
38     pendulum.set_data([0, 1 * np.sin(angle)], [0, -1 * np.cos(angle)])
39
40     # Update the title with the current time
41     ax.set_title(f'Simple Pendulum - Time: {time:.2f} s')
42
43     return pendulum,
44
45 # Create the figure and axis
46 fig, ax = plt.subplots()
47 ax.set_xlim(-1, 1)
48 ax.set_ylim(-1.2, 0.5)
49
50 # Plot the pendulum bob
51 pendulum, = ax.plot([], [], 'bo-', markersize=20)
52
53 # Set the aspect ratio to be equal
54 ax.set_aspect('equal', adjustable='datalim')
55
56
57
58 plt.xlabel('X (m)')
59 plt.ylabel('Y (m)')
60 plt.title('Simple Pendulum Animation')
61 plt.show()
62 anim=animation.FuncAnimation(fig, update, frames=100, \
63 blit=False, repeat=True)
64 anim

```

Código 5.2 Animación de un sistema de péndulo simple

5.1.1 Sistemas masa-resorte

Conclusiones similares pueden obtenerse para sistemas masa-resorte; es decir, su comportamiento sigue una lógica similar a la del péndulo simple. No obstante, en este caso, se deben considerar otras posibilidades. Por ejemplo, se analizará qué sucede cuando se incluye un factor de amortiguamiento o cuando este no está presente y el movimiento es forzado a través de una fuerza $F(t)$.

Partiendo de la figura 5.2

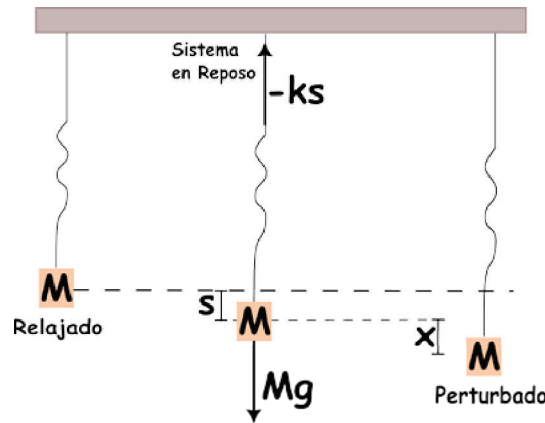


Figura 5.2 Sistema masa-resorte relajado, en reposo y perturbado

Para el sistema en reposo el diagrama de cuerpo libre arroja lo siguiente:

$$Mg - ks = 0 \quad (5.16)$$

La razón es que, una vez que se fija la masa en el sistema, este comienza a oscilar desde la posición en la que el resorte está totalmente relajado hasta alcanzar la condición de reposo. Es decir, cuando el resorte se alarga lo suficiente para compensar el peso y permite la oscilación hasta lograr detenerse. A partir de esta circunstancia se le aplica una pequeña perturbación X_0 y se le deja oscilar, para esta situación la ecuación 5.16 se modifica de la siguiente manera.

$$Mg - k(s + \vec{x}) = M\vec{a} \quad (5.17)$$

Por lo cual, la ecuación diferencial que gobierna al sistema queda de la siguiente forma,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (5.18)$$

Como ya se mencionó, las condiciones iniciales de este problema parten del hecho que inicialmente el sistema se encuentra en reposo y que además se le aplica una pequeña perturbación, es decir, $\dot{x}(0) = 0$ y $x(0) = X_0$. De 5.18 se tiene la siguiente ecuación de índices.

$$\lambda^2 + \frac{k}{M} = 0 \quad (5.19)$$

\therefore

$$x(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + C_2 \sen\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) \quad (5.20)$$

Dado que la solución de 5.19 es $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{M}}i$. Haciendo uso de la C.I entonces se tiene que la variación de la posición en el tiempo para el sistema masa-resorte está dada por:

$$x(t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) \quad (5.21)$$

Como se puede observar, la solución del sistema masa-resorte exhibe un comportamiento similar al del péndulo simple. En ambos casos, se manifiesta un comportamiento ondulatorio que varía exclusivamente en los parámetros característicos de cada sistema. En el péndulo, estos parámetros son la gravedad y la longitud de la cuerda; en el caso del sistema masa-resorte, son la constante elástica del resorte y la masa respectiva. Ambos casos se consideran ejemplos de movimiento armónico simple, ya que ninguno de ellos aborda un parámetro fundamental: el amortiguamiento. Precisamente, el amortiguamiento es crucial, ya que limita las oscilaciones en el tiempo. Por lo tanto, resulta necesario estudiar sistemas que se asemejen más a situaciones reales al incorporar este factor.

5.1.2 Sistema masa-resorte con amortiguamiento y forzamiento

Como se mencionó previamente, los sistemas físicos gobernados por el Movimiento Armónico Simple (M.A.S.) no representan un modelo completamente realista. La construcción de un sistema que se acerque a esta idealización resulta altamente compleja, ya que implica la necesidad de eliminar o, al menos, minimizar un factor tan omnipresente como la fricción. Por ello, se requiere una descripción más precisa que permita una aproximación más fiel a los fenómenos reales.

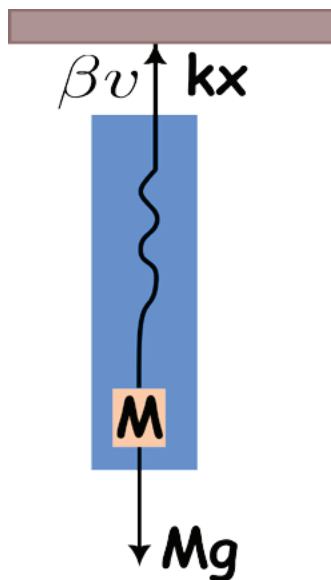


Figura 5.3 Sistema masa-resorte con amortiguamiento

Con respecto a la figura 5.3, la ecuación diferencial que describe este sistema se obtiene a partir del análisis del diagrama de cuerpo libre. Cabe resaltar que el factor de amortiguamiento considerado solo es válido en el caso de velocidades de oscilación bajas. Asimismo, las unidades de β se expresan como $\frac{N \cdot s}{m}$ [32]. A partir de esto, se tiene lo siguiente:

$$-k\vec{x} - \beta\vec{v} = M\vec{a} \quad (5.22)$$

Reescribiendo 5.22 como una E.D.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (5.23)$$

Haciendo $2\zeta = \frac{\beta}{M}$ y $\omega^2 = \frac{k}{M}$, 5.23 toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta \frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (5.24)$$

Por lo tanto, la ecuación de índices asociada a 5.24 sería:

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + \omega^2 = 0 \quad (5.25)$$

La solución de esta última ecuación permite construir tres casos concretos debido a la naturaleza del discriminante ya que:

$$\lambda = -\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - \omega^2} \quad (5.26)$$

Por lo cual si $v = \zeta^2 - \omega^2$, entonces

$$v = \begin{cases} \zeta^2 - \omega^2 < 0 & \text{Subamortiguado} \\ \zeta^2 - \omega^2 > 0 & \text{Sobreamortiguado} \\ \zeta^2 - \omega^2 = 0 & \text{Críticamente amortiguado} \end{cases} \quad (5.27)$$

Las soluciones de la ecuación 5.24 en cada uno de los casos mencionados en 5.27 es como sigue. Para el caso sobreamortiguado:

$$x(t) = e^{-\zeta t} (C_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - \omega^2} t}) \quad (5.28)$$

Es de resaltar, que para cualquiera de los casos las condiciones iniciales serán las mismas, esto es, $x(0) = X_0$ y $\dot{x}(0) = 0$; aplicando ambas a 5.28 se obtiene el siguiente sistema lineal.

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = X_0 \\ \sqrt{\zeta^2 - \omega^2} C_1 - C_2 \sqrt{\zeta^2 - \omega^2} = X_0 \zeta \end{cases} \quad (5.29)$$

Resolviendo para C_1, C_2

$$C_1 = \frac{X_0}{2} \left[1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2}} \right] \quad (5.30)$$

$$C_2 = \frac{X_0}{2} \left[1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2}} \right] \quad (5.31)$$

Por lo tanto la solución general del sistema masa-resorte en este régimen es como sigue:

$$x(t) = \frac{X_0}{2} e^{-\zeta t} \left[\left[1 + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2}} \right] e^{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2} t} + \left[1 - \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - \omega^2}} \right] e^{-\sqrt{\zeta^2 - \omega^2} t} \right] \quad (5.32)$$

Esta expresión permite modelar sistemas donde la constante de amortiguamiento $\zeta = \frac{\beta}{2M}$ es mayor que la frecuencia natural de oscilación del sistema $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

Las otras dos situaciones presentan modelos similares. Por ejemplo, cuando el sistema es críticamente amortiguado, la solución general que describe este tipo de sistemas se expresa de la siguiente forma:

$$x(t) = e^{-\zeta t} [C_1 + C_2 t] \quad (5.33)$$

Como se observa, la solución depende únicamente del término de amortiguamiento, sin influencia de la frecuencia natural de oscilación del sistema. Esto significa que el sistema retorna rápidamente a su condición de equilibrio, lo cual es ideal en muchos sistemas físicos donde cualquier perturbación debe ser mitigada de manera rápida, proporcionando estabilidad y robustez frente a fallos.

El último caso a considerar es cuando el sistema se encuentra subamortiguado. En este escenario, la intuición indica que su comportamiento es predominantemente oscilatorio, como se muestra en la siguiente expresión.

$$x(t) = e^{-\zeta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)] \quad (5.34)$$

En la figura 5.4 se muestra la solución de cada uno de estos sistemas por separado.

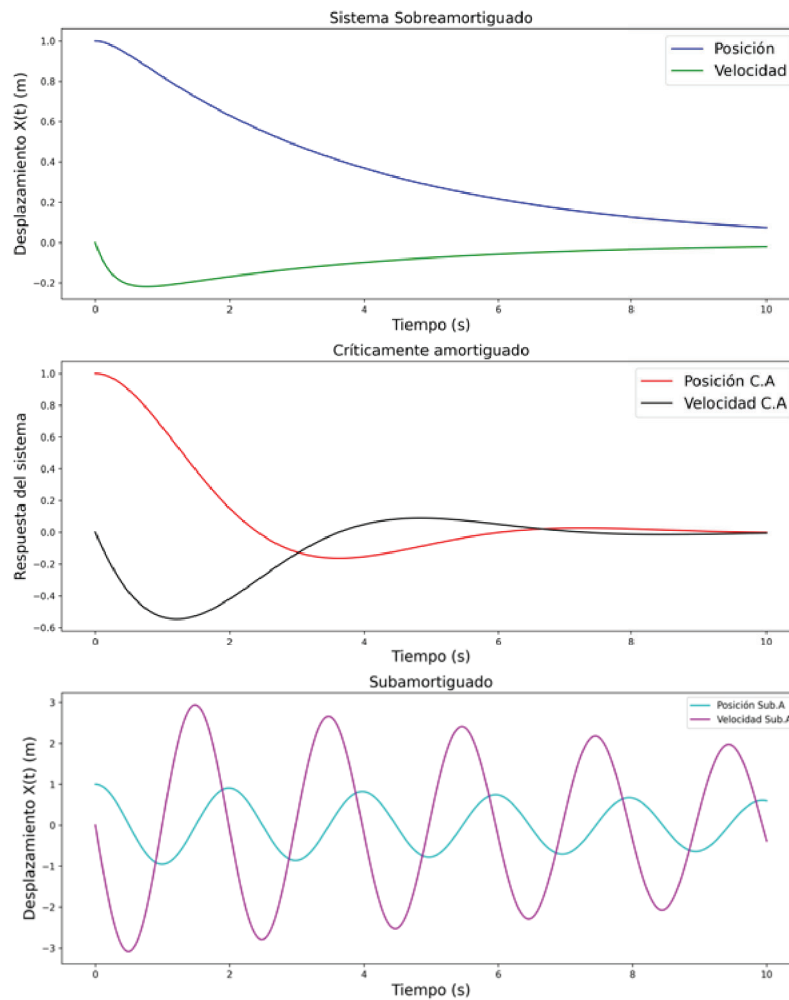


Figura 5.4 Respuesta del sistema masa-resorte con amortiguamiento variando los parámetros de oscilación natural y coeficiente de amortiguamiento

El siguiente código permite obtener estas gráficas de la respuesta del sistema en el tiempo para cada uno de los casos ya planteados para el sistema masa-resorte con amortiguamiento.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 def dynamic_system(y, t, m, c, k, F):
6     # y[0] = position
7     # y[1] = velocity
8     dydt = [y[1], (F(t) - c * y[1] - k * y[0]) / m]
9     return dydt
10 # System parameters
11 m = 1.0 # mass
12 c = 4.0 # damping coefficient
13 k = 1.0 # spring constant
14 # External force function (customize as needed)
15 def external_force(t):
16     return 0.0 # No external force in this example
    
```

```
17 # Initial conditions
18 y0 = [1.0, 0.0] # initial position and initial velocity
19 t = np.linspace(0, 10, 1000) # time vector
20
21 # Solve the differential equation
22 sol = odeint(dynamic_system, y0, t, args=(m, c, k, external_force))
23 sol1 = odeint(dynamic_system, y0, t, args=(m, 1.0, k, external_force))
24 sol2=odeint(dynamic_system, y0, t, args=(m, 0.1, 10.0, external_force))
25
26 # Plot the result
27 # Create a figure and three subplots
28 fig, axs = plt.subplots(3, 1, figsize=(12, 15), dpi=300)
29
30 # Plot the first subplot (Position and Velocity)
31 axs[0].plot(t, sol[:, 0], 'b', label='Position')
32 axs[0].plot(t, sol[:, 1], 'g', label='Velocity')
33 axs[0].set_title('Overdamped System', fontsize=16)
34 axs[0].set_xlabel('Time (s)', fontsize=16)
35 axs[0].set_ylabel('Displacement X(t) (m)', fontsize=16)
36 axs[0].legend(fontsize=16)
37
38 # Plot the second subplot (Position and Velocity C.A)
39 axs[1].plot(t, sol1[:, 0], 'r', label='Position C.A')
40 axs[1].plot(t, sol1[:, 1], 'k', label='Velocity C.A')
41 axs[1].set_title('Critically Damped', fontsize=16)
42 axs[1].set_xlabel('Time (s)', fontsize=16)
43 axs[1].set_ylabel('System Response', fontsize=16)
44 axs[1].legend(fontsize=16)
45
46 # Plot the third subplot (Position and Velocity Sub.A)
47 axs[2].plot(t, sol2[:, 0], 'c', label='Position Sub.A')
48 axs[2].plot(t, sol2[:, 1], 'm', label='Velocity Sub.A')
49 axs[2].set_title('Underdamped', fontsize=16)
50 axs[2].set_xlabel('Time (s)', fontsize=16)
51 axs[2].set_ylabel('Displacement X(t) (m)', fontsize=16)
52 axs[2].legend(fontsize=16)
53
54 # Adjust layout for better appearance
55 plt.tight_layout()
56 plt.legend()
57
58 # Show the plots
59 plt.show()
```

Código 5.3 Solución de los tres sistemas masa-resorte con amortiguamiento

Por último, se analizará el problema de un sistema masa-resorte con forzamiento y sin amortiguamiento, con el objetivo de evidenciar las implicaciones que esto tiene en aplicaciones reales. Por ejemplo, este fenómeno resulta crítico en el diseño de puentes, ya que, en el caso de que la frecuencia natural de oscilación del puente coincida con la frecuencia de la fuerza externa, la probabilidad de colapso aumenta significativamente.

Dicho sistema puede modelarse mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = A\text{sen}(\sigma t) \quad (5.35)$$

Aplicando transformada de Laplace a ambos lados de 5.35 se obtiene.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2x}{dt^2}\right\} + \omega^2 \mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{A\text{sen}(\sigma t)\} \quad (5.36)$$

$$\rightarrow s^2x(s) - sx(0) - \dot{x}(0) + \omega^2x(s) = \frac{A\sigma}{s^2 + \sigma^2} \quad (5.37)$$

Considerando las condiciones iniciales mencionadas previamente, $x(0) = X_0$ y $\dot{x}(0) = 0$ y resolviendo para $x(s)$ 5.37 queda de la siguiente forma.

$$s^2x(s) - sX_0 + \omega^2x(s) = \frac{A\sigma}{s^2 + \sigma^2} \quad (5.38)$$

∴

$$x(s) = \frac{A\sigma}{(s^2 + \sigma^2)(s^2 + \omega^2)} + \frac{sX_0}{s^2 + \omega^2} \quad (5.39)$$

De aplicar fracciones parciales al primer término de la derecha de 5.39 la expresión se simplifica de la siguiente forma:

$$x(s) = \frac{A\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)(s^2 + \omega^2)} - \frac{A\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)(s^2 + \sigma^2)} + \frac{X_0s}{s^2 + \omega^2} \quad (5.40)$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a ambos lados de 5.40.

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)(s^2 + \omega^2)}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A\sigma}{(\sigma^2 - \omega^2)(s^2 + \sigma^2)}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0s}{s^2 + \omega^2}\right\} \quad (5.41)$$

Resolviendo para $x(t)$:

$$x(t) = \frac{A\sigma}{\omega(\sigma^2 - \omega^2)}\text{sen}(\omega t) - \frac{A}{(\sigma^2 - \omega^2)}\text{sen}(\sigma t) + X_0 \cos(\omega t) \quad (5.42)$$

El siguiente paso es identificar la influencia de la frecuencia de la fuerza externa sobre el sistema, es decir, estimar la frecuencia de resonancia del sistema, lo cual ocurre cuando $\sigma \rightarrow \omega$, en otras palabras.

$$\lim_{\sigma \rightarrow \omega} x(t) = \lim_{\sigma \rightarrow \omega} \frac{A}{\omega(\sigma^2 - \omega^2)}\text{sen}(\omega t) - \lim_{\sigma \rightarrow \omega} \frac{A}{(\sigma^2 - \omega^2)}\text{sen}(\sigma t) + \lim_{\sigma \rightarrow \omega} X_0 \cos(\omega t) \quad (5.43)$$

Aplicando la regla de L'Hôpital a 5.43.

$$= \lim_{\sigma \rightarrow \omega} \frac{A}{2\omega\sigma}\text{sen}(\omega t) - \lim_{\sigma \rightarrow \omega} \frac{At}{2\sigma}\cos(\sigma t) + X_0 \cos(\omega t) \quad (5.44)$$

Evaluando los limites.

$$\lim_{\sigma \rightarrow \omega} x(t) = \frac{A}{2\omega^2} \text{sen}(\omega t) - \frac{At}{2\omega} \text{cos}(\omega t) + X_0 \text{Cos}(\omega t) \quad (5.45)$$

Asignándole valores a la amplitud A , frecuencia ω y perturbación inicial X_0 se obtiene la siguiente figura 5.5.

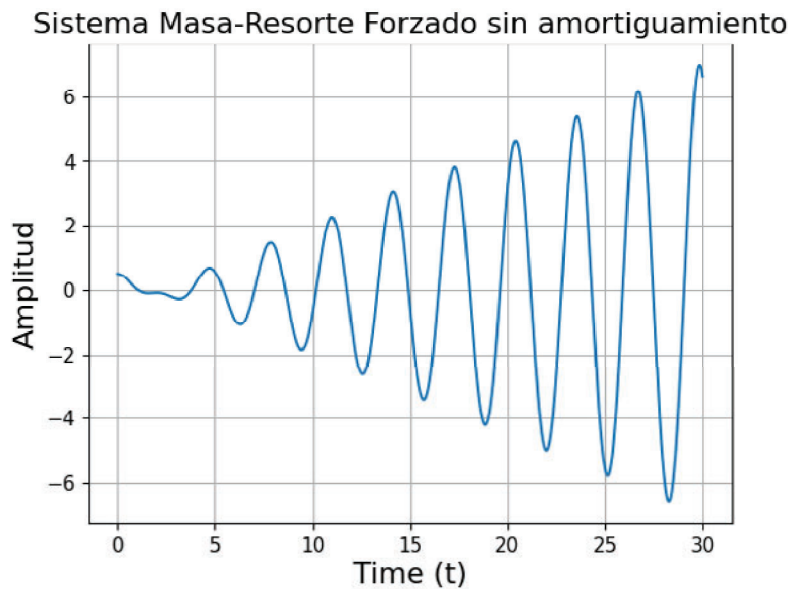


Figura 5.5 Oscilación del sistema masa-resorte sin amortiguamiento

Se puede observar claramente que a medida que $t \rightarrow \infty$, la amplitud de $x(t)$ crece de manera proporcional, llevando a que $x(t) \rightarrow \infty$. Este fenómeno se hace evidente al analizar la expresión 5.45, donde el segundo término diverge a medida que el tiempo aumenta de forma arbitraria. Este último punto es exactamente lo que se pretendía demostrar y constituye la causa fundamental del colapso en sistemas que siguen la ley de Hooke.

5.2 Ondas electromagnéticas

Los sistemas ondulatorios están presentes en toda la naturaleza, manifestándose de diversas formas. Uno de los fenómenos menos intuitivos, pero más evidentes, es el de los campos electromagnéticos, cuya expresión más clara es la luz. La descripción clásica de estos campos se fundamenta en las cuatro ecuaciones de Maxwell, complementadas por la fuerza de Lorentz. Las primeras explican el origen y la dinámica de los campos eléctricos y magnéticos, mientras que la segunda describe la interacción del campo electromagnético con la materia que posee carga eléctrica.

El propósito de este capítulo es explorar la naturaleza de las ondas electromagnéticas y su relación con diversos fenómenos asociados a la luz. En particular, se profundizará en conceptos como el índice de refracción y el espectro electromagnético, entre otros.

Las ecuaciones de Maxwell se presentan a continuación, con el objetivo de resaltar su conexión con la naturaleza ondulatoria de la luz:

Ley de Gauss Eléctrica

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.46)$$

Ley de Gauss Magnética

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.47)$$

Ley de Inducción de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.48)$$

Ley de Ampere-Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.49)$$

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.50)$$

A partir de la combinación de las cuatro ecuaciones de Maxwell², es posible construir una teoría que describa el comportamiento y la propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio libre. Para ello, es necesario establecer los mecanismos que permiten la propagación de la luz en el espacio. Inicialmente, se empleará el campo magnético \vec{H} en lugar de su contraparte, el vector de inducción magnética \vec{B} , dado que $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

Además, considerando que el campo eléctrico asociado a una onda electromagnética en un punto arbitrario del espacio vacío no depende de una distribución de carga ρ (es decir, las líneas de campo eléctrico permanecen inalteradas antes y después de dicho punto), las leyes de Gauss eléctrica y magnética (5.46) adoptan la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.51)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (5.52)$$

En ese mismo orden de ideas, en el espacio vacío por definición no hay presencia de corrientes eléctricas, por lo cual, 5.48 y 5.49 quedan de la siguiente forma.

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (5.53)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.54)$$

² Para este análisis no se considera la fuerza de Lorentz.

Aplicando el rotacional a ambos lados de 5.53.

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \quad (5.55)$$

Aplicando la propiedad del triple producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$ se tiene que.

$$(\nabla \cdot \vec{E})\nabla - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \quad (5.56)$$

Teniendo en cuenta 5.51 y 5.54, entonces.

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (5.57)$$

Un resultado similar puede obtenerse para el campo magnético si, en lugar de partir de la ley de inducción de Faraday, se aplica el mismo procedimiento a la ley de Ampère. Esto da lugar a la siguiente ecuación:

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (5.58)$$

Como se mostró anteriormente, la permeabilidad magnética del vacío es $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{N}{A^2}$, y la permitividad eléctrica en este mismo medio es $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$. Por lo tanto, el factor $\mu_0 \epsilon_0$ tiene las siguientes unidades:

$$\epsilon_0 \mu_0 [=] \frac{C^2}{Nm A^2} \quad (5.59)$$

Lo anterior de tener en cuenta que $F [=] \frac{C^2}{Nm}$; además si $A [=] \frac{C}{s}$ entonces 5.59 queda.

$$\epsilon_0 \mu_0 [=] \frac{C^2 s^2}{m^2 C^2} [=] \frac{s^2}{m^2} \quad (5.60)$$

O lo que es lo mismo, el producto $\mu_0 \epsilon_0$ tiene unidades de velocidad invertidas.

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (5.61)$$

Donde c es la velocidad de la luz en el vacío, es decir, $c \approx 299792458 \frac{m}{s} = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}}$. Esto implica que la constante lumínica c surge de manera natural al aplicar las leyes de Maxwell al problema de la propagación de una onda electromagnética en el espacio vacío, y que esta puede describirse completamente en términos del campo eléctrico o del campo magnético.

Si se toma U ya sea como \vec{H} o \vec{E} , y se parte de cualquiera de las expresiones 5.57 o 5.58, entonces la ecuación de onda en coordenadas cartesianas se define de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (5.62)$$

Como se puede observar, se trata de una ecuación diferencial parcial cuya solución no será abordada en este texto. Sin embargo, se probará que la siguiente función satisface dicha ecuación:

$$U(z, t) = U_0 \cos(kz - \omega t) \quad (5.63)$$

Donde k es el número de onda (no debe confundirse con κ , la constante dieléctrica) y ω es la velocidad angular. Para los fines de este texto, el resultado presentado en 5.63 es suficiente. No se profundizará en los métodos de solución, ya que constituyen una temática de alta complejidad.

Regresando a la ecuación 5.63, esta representa una onda plana armónica. Este tipo de ondas se caracteriza por exhibir, en un plano paralelo a su dirección de propagación, un frente de onda plano. En otras palabras, si situamos un observador en un plano que interseca una onda plana, este siempre percibirá el mismo valor. En el caso específico de la luz (un campo eléctrico), los frentes de onda son paralelos entre sí, como se ilustra en la figura 5.6. Cabe aclarar que dicha representación no es físicamente posible, dado que implicaría que la onda abarcara la totalidad del espacio. Sin embargo, es un modelo matemático útil y ampliamente validado.

Un concepto importante derivado de la ecuación de onda es la velocidad de fase, la cual se puede observar en la figura 5.6. En ella se muestran dos frentes de onda correspondientes al mismo punto, separados en el espacio por una distancia dada por $\Delta z = u\Delta t$, donde u es la velocidad de fase, es decir, la velocidad a la cual se desplaza un punto específico de la onda.

Este concepto permite definir parámetros fundamentales en la teoría de ondas electromagnéticas, como la longitud de onda (λ), la velocidad angular (ω), el número de onda espectroscópico (σ), el período (T) y la frecuencia (ν). Estos mismos conceptos se introducen en el estudio de ondas mecánicas; sin embargo, en el contexto de las ondas electromagnéticas, su interpretación puede presentar algunas diferencias. Por ejemplo, la longitud de onda se define como la distancia que recorre la onda durante un período (T), manteniendo así la misma relación que en las ondas mecánicas. El período y la frecuencia también conservan sus interpretaciones en ambas teorías. En cuanto al número de onda, este representa la cantidad de ciclos de la onda en una porción determinada del espacio, es decir, el número de repeticiones por unidad de longitud.

Las siguientes relaciones son fundamentales para comprender mejor el concepto de velocidad de fase (u).

Velocidad de fase

$$u = \frac{\omega}{k} \quad (5.64)$$

Longitud de onda

$$\lambda = uT = \frac{2\pi}{k} = \frac{1}{\sigma} \quad (5.65)$$

Frecuencia

$$\nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (5.66)$$

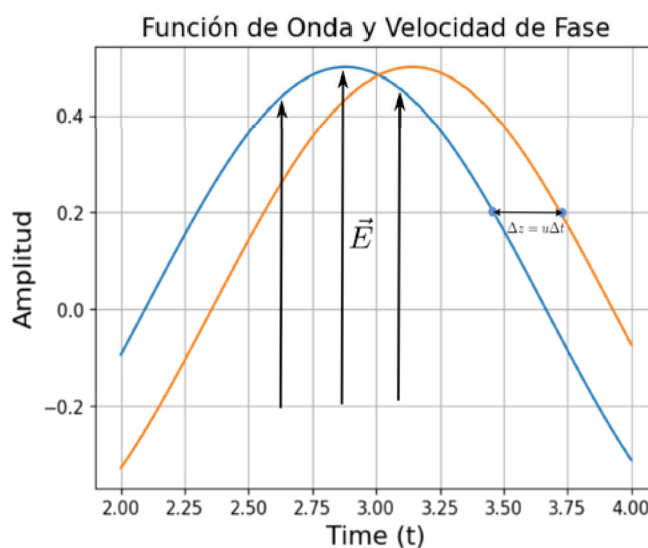


Figura 5.6 Onda plana sinusoidal

Una representación relativamente apropiada del comportamiento de una onda viajando a través del espacio se puede apreciar en 5.7 con su respectivo código en Python.

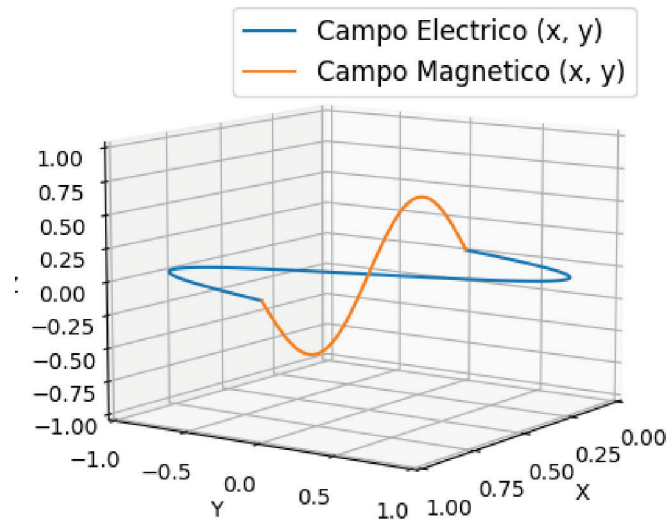


Figura 5.7 Representación de un campo electromagnético

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
4
5 ax = plt.figure().add_subplot(projection='3d')
6
7 # Plot a sin curve using the x and y axes.
8 x = np.linspace(0, 1.5, 500)
9 y = np.sin(x * 2 * np.pi)
10 z = 0.5 * np.sin(x * 2 * np.pi)
11 ax.plot(x, y, zs=0, zdir='z', label='Campo Electrico (x, y)')
12 ax.plot(x, z, zs=0, zdir='y', label='Campo Magnetico (x, y)')
13
14 # Set MaxNLocator to control the number of ticks on the x-axis
15 ax.xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(nbins=4))
16 ax.yaxis.set_major_locator(MaxNLocator(nbins=4))
17
18 # Make legend, set axes limits and labels
19 plt.tick_params(axis='x', which='major', labelsize=10)
20 plt.tick_params(axis='y', which='major', labelsize=10)
21 ax.legend(fontsize='12')
22 ax.set_xlim(0, 1.5)
23 ax.set_ylim(-1, 1)
24 ax.set_zlim(-1, 1)
25 ax.set_xlabel('X')
26 ax.set_ylabel('Y')
27 ax.set_zlabel('Z')
28
29 # Customize the view angle easier to see scatter points
30
31 ax.view_init(elev=15., azimuth=35, roll=0)
32
```

33 `plt.show()`

Código 5.4 Representación en el espacio 3D de una onda electromagnética

5.2.1 Espectro electromagnético

El espectro electromagnético se manifiesta a través de ondas electromagnéticas con distintos niveles de energía, originadas por diversas fuentes. Por ejemplo, el espectro visible en condiciones naturales se genera debido a reacciones nucleares en el Sol. Una parte de esta radiación, con longitudes de onda por debajo de los 200 nm, es absorbida en las capas externas de la atmósfera, y se conoce como ionizante. El resto se absorbe en las capas atmosféricas sucesivas, y la porción comprendida entre [280-2500] nm es la que interactúa diariamente con nosotros.

Dentro de este intervalo, la región [405-785] nm es denominada espectro visible. Más allá de este rango se encuentra la región infrarroja. Es importante destacar que el ojo humano puede percibir algo de esta región, específicamente en el llamado infrarrojo cercano.

Cuando se hace referencia a la longitud de onda, simultáneamente se está aludiendo a la energía manifestada por la interacción de las ondas electromagnéticas con algún otro medio físico, conforme a la ecuación de Planck:

$$E = \frac{hc}{\lambda} \tag{5.67}$$

Donde h es la constante de Planck ($6,62607015 \times 10^{-34}$ Js), c la velocidad de la luz en el vacío y λ la longitud de onda en metros. La tabla 5.1 muestra ejemplos de la manifestación de las ondas electromagnéticas en diferentes contextos con su respectivo nivel de energía (longitud de onda).

Tabla 5.1 Espectro electromagnético

Región	Longitud de Onda λ	Ejemplo
UV de vacío	< 200 nm	rayos X, rayos Gamma
UV	200 nm -400 nm	luz ultravioleta
Visible	400 nm -700 nm	luz visible
IR cercano	700 nm -1.4 μ m	control remoto
IR medio	1.4 μ m -3 μ m	radiación por calor
IR lejano	3 μ m -1 mm	rotación de moléculas
Microondas	1 mm -1 m	horno microondas

Una de las aplicaciones fundamentales del concepto de espectro electromagnético es la espectroscopía, que consiste en el estudio de la composición molecular y atómica de la materia a través de su interacción con diversas formas de radiación. La luz es la forma más común de radiación utilizada en este proceso. Ejemplos notables de técnicas espectroscópicas incluyen la espectroscopia Raman, que investiga las rotaciones y vibraciones de las moléculas, y la espectroscopía de absorción, que presenta varios matices. Por ejemplo, si una molécula absorbe una longitud de onda específica sin destrucción de la muestra, se habla de absorción debido a los enlaces moleculares σ y π . Por otro lado, cuando hay destrucción de la muestra, esta reemite en diversas longitudes de onda, lo que permite identificar la composición atómica de la muestra.

5.2.2 Relación entre campo magnético y eléctrico para una onda electromagnética

Es destacable que la relación entre el campo eléctrico y magnético está mediada por la velocidad de la luz en el vacío. Esta conexión se evidencia a partir de la definición de la fuerza de Lorentz para una onda electromagnética propagándose por el espacio. En otras palabras, se trata de un campo magnético y eléctrico sincronizados y mutuamente perpendiculares. Además, no experimenta una fuerza externa neta, debido a la ausencia de masa de los fotones, por lo cual en virtud de la fuerza de Lorentz 5.50 se tiene que.

$$-q\vec{E} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.68)$$

∴

$$\vec{E}_y = \epsilon_{231} v_z B_x \quad (5.69)$$

Aquí se consideró que la onda se propaga en la dirección z , mientras que sus campos eléctrico y magnético se proyectan en las direcciones "yz" "x", respectivamente, por lo cual al evaluar el producto vectorial queda lo siguiente (el signo menos no se tiene en cuenta dado que al ser una onda sinusoidal este queda insertado en la fase de la onda).

$$E_y = v_z B_x \quad (5.70)$$

Teniendo en cuenta que las ondas electromagnéticas se propagan a la velocidad de la luz c en el vacío, entonces, la expresión 5.70 queda de la siguiente forma.

$$\vec{E} = c\vec{B} \quad (5.71)$$

La interpretación clásica sugiere que una onda electromagnética se caracteriza principalmente como un campo eléctrico en propagación, debido a la diferencia significativa en magnitudes con respecto al campo magnético.

5.3 Óptica

En la sección anterior se introdujeron una serie de conceptos que permiten contextualizar muchos de los elementos que se emplearán para exponer la temática relacionada con el campo de la óptica, concretamente cuando se constató la relación de la velocidad de la luz en el vacío con las ecuaciones de Maxwell, se presentó un método donde a partir de la permitividad y permeabilidad eléctrica y magnética respectivamente, era posible establecer dicha constante. Siguiendo este mismo razonamiento, pero esta vez, en lugar de apelar a una onda viajera en el espacio vacío, se analizará una situación más realista donde el medio de propagación es un medio físico. Teniendo en cuenta que la permitividad y permeabilidad relativa están dadas por:

Permitividad eléctrica relativa (constante dieléctrica)

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \kappa \quad (5.72)$$

Permeabilidad magnética relativa

$$\kappa_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (5.73)$$

A ϵ y μ se les denomina la permitividad y permeabilidad del medio y que como se puede apreciar depende de las características del medio a través del cual se propagan las líneas de campo eléctrico y magnético. En tal sentido y siguiendo el mismo razonamiento que en el caso de la velocidad de la luz, es posible definir la velocidad en el medio como.

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (5.74)$$

De 5.72, 5.73 se tiene.

$$u = \frac{1}{\sqrt{\kappa\kappa_m\mu_0\epsilon_0}} \quad (5.75)$$

Pero $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$, entonces.

$$u = c \frac{1}{\sqrt{\kappa\kappa_m}} \quad (5.76)$$

A la expresión $\sqrt{\kappa\kappa_m}$ se le denomina índice de refracción (n). Además, para la mayoría de los materiales transparentes en el espectro visible (405 - 785 nm), se cumple que $\kappa_m \approx 1$, lo que implica que se consideran materiales no magnéticos. Por lo tanto, $n = \sqrt{\kappa}$, en otras palabras.

$$n = \frac{c}{u} = \sqrt{\kappa} \quad (5.77)$$

Como se puede apreciar, el índice de refracción es una cantidad adimensional que compara la velocidad de propagación de una onda electromagnética en un medio con respecto a la velocidad de la luz en el vacío (c). La tabla 5.2 muestra algunos índices de refracción para materiales comunes [33].

Tabla 5.2 Ejemplos de índices de refracción para diferentes materiales

Material	Índice de Refracción (n)
Vacío	1.000
Aire	1.00045
Agua (20°C)	1.333
Vidrio (cristal)	1.5
Diamante	2.42
Etanol	1.36

5.3.1 Ley de Snell

Esta ley es fundamental para definir el concepto de refracción. Un ejemplo cotidiano de este fenómeno puede observarse al mirar a través de un vaso con algún líquido y cualquier objeto introducido en él; por ejemplo, una cuchara se ve deformada respecto de la parte expuesta al aire. Este efecto es causado por la diferencia en los índices de refracción entre ambos medios, como se aprecia en la figura 5.8, donde el ángulo de incidencia θ_1 de un rayo de luz que penetra en el medio 1 cambia su trayectoria al ingresar al medio 2.

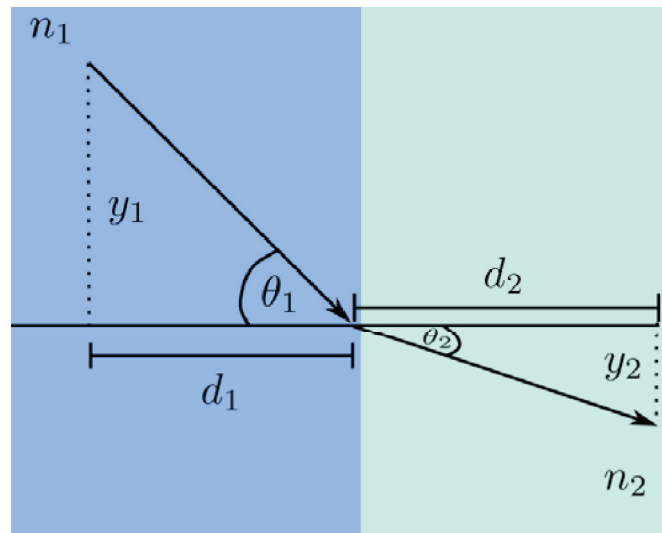


Figura 5.8 Trayectoria de la luz en medios con diferente índice de refracción

La relación entre los ángulos cuando un haz de luz pasa de un medio a otro se puede deducir a partir de la aplicación del principio de Fermat, el cual se enuncia a continuación:

Teorema 5.3.1 – Principio de Fermat. En el contexto óptico, el Principio de Fermat establece formalmente que, dados dos puntos A y B en un medio con índice de refracción n , la trayectoria óptima seguida por la luz es aquella que minimiza el tiempo óptico, es decir, un mínimo local.

La distancia total T recorrida por la luz en el esquema esta dada por:

$$T = n_1 \frac{\sqrt{d_1^2 + y_1^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{d_2^2 + y_2^2}}{c} \quad (5.78)$$

Haciendo uso del principio de Fermat, es requerido minimizar la función de distancia recorrida por la luz T , para esto se deriva 5.78 con respecto a la distancia. Para ello es necesario reescribir la ecuación señalada en términos de una sola variable, esto es, hacer la siguiente sustitución: $\ell = y_1 + y_2$ por lo tanto $y_2 = \ell - y_1$, de tal forma que:

$$T = n_1 \frac{\sqrt{d_1^2 + y_1^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{d_2^2 + (\ell - y_1)^2}}{c} \quad (5.79)$$

Teniendo como base que tanto d_1 como d_2 son constantes, la derivada de 5.79 queda de la siguiente manera.

$$\frac{dT}{dy_1} = \frac{n_1 y_1 (d_1^2 + y_1^2)^{-1/2}}{c} - \frac{n_2 (d_2^2 + (\ell - y_1)^2)^{-1/2} (\ell - y_1)}{c} = 0 \quad (5.80)$$

De la figura se desprende que $\text{sen}(\theta_1) = \frac{y_1}{\sqrt{d_1^2 + y_1^2}}$ y $\text{sen}(\theta_2) = \frac{\ell - y_1}{\sqrt{d_2^2 + (\ell - y_1)^2}}$, por consiguiente.

$$\text{sen}(\theta_1) \frac{n_1}{c} - \text{sen}(\theta_2) \frac{n_2}{c} = 0 \quad (5.81)$$

∴

$$\boxed{n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2)} \quad (5.82)$$

A 5.82 se le conoce como la ley de Snell, que permite determinar los índices de refracción de dos medios distintos, dados los ángulos de incidencia y refracción.

5.3.2 Óptica geométrica

La ecuación que se derivará a continuación será el caballo de batalla para el planteamiento de la óptica geométrica y matricial, siendo esta última la manera elegida para mostrar el diseño de algunos dispositivos ópticos. A esta se le denomina "la del fabricante de lentes" dada su importancia para esta tarea. Es de resaltar, que para todas las deducciones se partirá del concepto de lente ideal delgada, es decir, una lente teórica que simplifica muchos de los problemas prácticos relacionados con las lentes reales. Las características de una lente delgada ideal son las siguientes:

Espesor despreciable: Se considera que el espesor de la lente es tan pequeño que puede ser despreciado en los cálculos. Esto implica que todos los cambios en la dirección de la luz ocurren en un único plano.

Superficies Refractivas Perfectas: Las dos superficies de la lente son perfectamente esféricas y cualquier aberración óptica es ignorada. Esto significa que la lente puede enfocar la luz sin distorsiones.

Índice de Refracción Constante: El material de la lente tiene un índice de refracción constante que no varía con la longitud de onda de la luz (no hay dispersión).

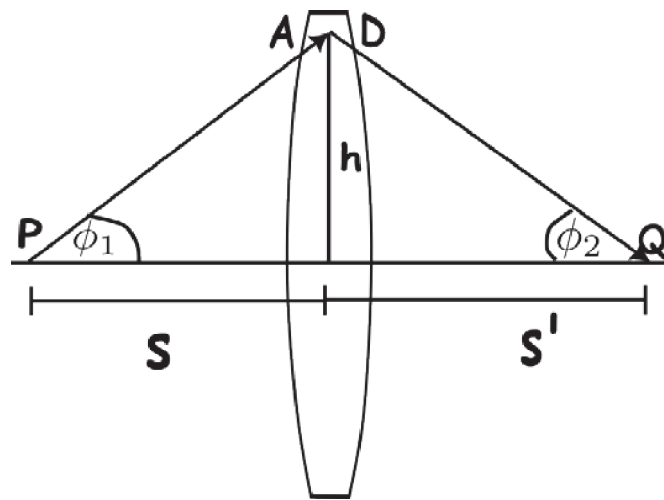


Figura 5.9 Trazado de rayos en una lente delgada

Partiendo de la figura 5.9, se tiene un sistema compuesto por una lente ideal, como la que ya se mencionó. Asimismo, se supondrá que esta se encuentra expuesta al aire, es decir, que el índice de refracción se tomará como 1. Cabe aclarar que la imagen del objeto, localizado en el punto P, se forma en el punto Q.

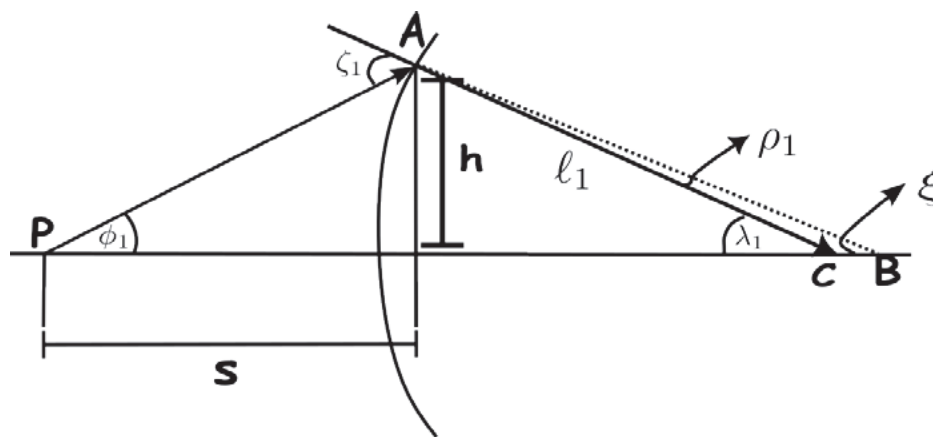


Figura 5.10 Trazado geométrico del lado izquierdo de la lente

Por su parte, de la figura 5.10 se puede obtener la siguiente expresión para la ley de Snell, teniendo en cuenta que la luz incide sobre la lente en el punto A y se refracta hacia el punto D. Por lo tanto:

$$\text{sen}(\zeta_1) = n \text{sen}(\rho_1) \quad (5.83)$$

Aplicando aproximación de ángulo pequeño ($\text{sen}(\theta) \approx \theta$), también denominada aproximación paraxial en el contexto de la óptica Gaussiana y el trazado de rayos, por lo cual se tiene entonces:

$$\zeta_1 = n \rho_1 \quad (5.84)$$

Del triangulo PAB, se tiene que la suma de ángulos internos no adyacentes es igual al angulo exterior ζ_1 , es decir:

$$\zeta_1 = \phi_1 + \lambda_1 \quad (5.85)$$

Aplicando este mismo criterio pero esta vez, para el triangulo ACB

$$\lambda_1 = \rho_1 + \xi \quad (5.86)$$

\therefore

$$\rho_1 = \lambda_1 - \xi \quad (5.87)$$

Reemplazando 5.87 en 5.84:

$$\zeta_1 = n(\lambda_1 - \xi) \quad (5.88)$$

Ademas de 5.85 se obtiene la siguiente expresión:

$$\phi_1 + \lambda_1 = n(\lambda_1 - \xi) \quad (5.89)$$

Siguiendo un proceso similar, pero para la figura 5.11 se tiene que:

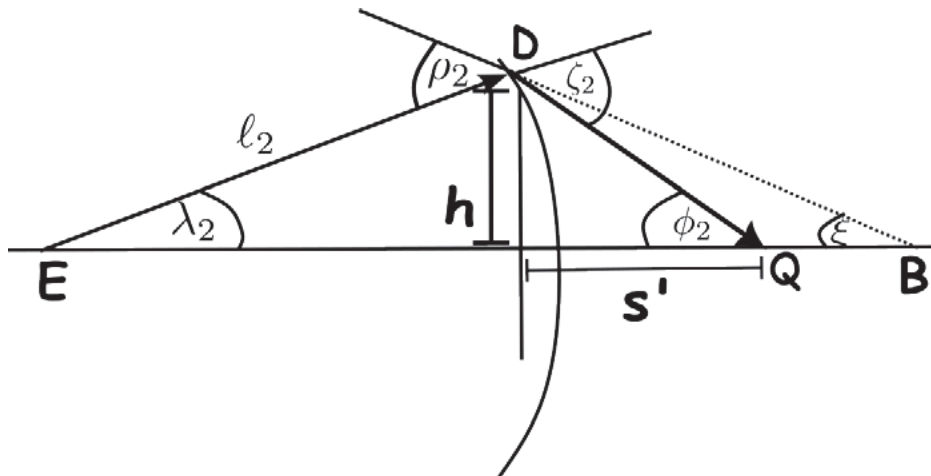


Figura 5.11 Trazado geométrico del lado izquierdo de la lente

$$\text{sen}(\zeta_2) = n\text{sen}(\rho_2) \quad (5.90)$$

Aplicando la aproximación de ángulo pequeño y las mismas consideraciones efectuadas para la figura anterior, entonces:

$$\zeta_2 = n\rho_2 \quad (5.91)$$

Ademas del triangulo EDQ se puede encontrar una relación entre los ángulos ρ_2 , λ_2 y ϕ_2 .

$$\zeta_2 = \lambda_2 + \phi_2 \quad (5.92)$$

Y del triangulo EDB

$$\rho_2 = \lambda_2 + \xi \quad (5.93)$$

Reemplazando 5.92 y 5.93 en 5.91 se obtiene:

$$\lambda_2 + \phi_2 = n(\lambda_2 + \xi) \quad (5.94)$$

Combinando 5.94 con 5.89 y simplificando, queda lo siguiente

$$\phi_1 + \phi_2 = (n - 1)(\lambda_2 + \lambda_1) \quad (5.95)$$

Teniendo en cuenta que $\tan(\phi_1) = \frac{h}{s}$, $\tan(\phi_2) = \frac{h}{s'}$ y ademas $\sin(\lambda_1) = \frac{h}{\ell_1}$, $\sin(\lambda_2) = \frac{h}{\ell_2}$. Así mismo, dado que la aproximación de ángulo pequeño también aplica para $\tan(\phi) \approx \phi$ entonces:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n - 1) \left(\frac{1}{\ell_1} + \frac{1}{\ell_2} \right) \quad (5.96)$$

A 5.96 se le conoce como la ecuación del fabricante de lentes, donde ℓ_1 y ℓ_2 son los radios de curvatura de la lente, y s y s' son las distancias al objeto y a la imagen, respectivamente. Esta ecuación permite diseñar sistemas ópticos simples en los cuales no se tienen en cuenta las aberraciones ocasionadas por las lentes. Para aplicaciones más avanzadas, es necesario considerar correcciones para estas aberraciones y otros efectos complejos que no están contemplados en la formulación básica presentada.

5.3.3 Óptica matricial

El objetivo de la óptica paraxial es aplicar una aproximación en el diseño de sistemas ópticos que simplifica el análisis al considerar únicamente los rayos que hacen ángulos pequeños con respecto al eje óptico. Esta aproximación de primer orden permite caracterizar sistemas complejos, como microscopios y telescopios, utilizando parámetros simples como la longitud focal y la magnificación, sin importar el número de elementos que los compongan. En este contexto, la óptica matricial se fundamenta en la descripción de sistemas ópticos que cumplen con las características mencionadas. A continuación, se presentan varias de estas metodologías para comprender el comportamiento de la luz en escenarios simples, sin tener en cuenta aberraciones ópticas y otras interacciones más complejas.

En general, una aproximación de primer orden es aquella que involucra la representación del sistema óptico únicamente en términos de las alturas y los ángulos.

Para obtener las matrices representativas de los diferentes elementos y sistemas ópticos se procederá haciendo uso de la ley de Snell o de argumentos geométricos. En particular, si se observa la figura 5.12, es factible encontrar una relación entre los rayos incidentes y salientes, en este caso, como no hay cambios en el índice de refracción y suponiendo que el sistema está comprendido entre los puntos P1 y P2, entonces se tiene lo siguiente:

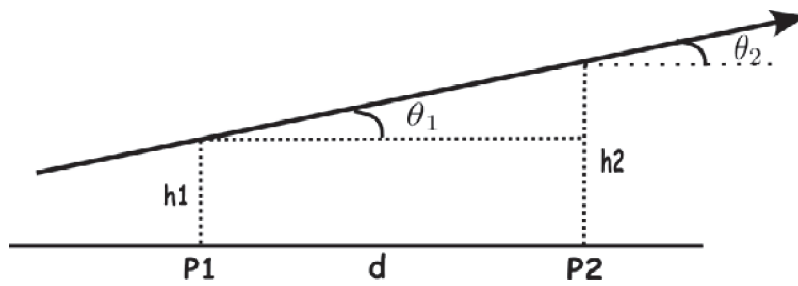


Figura 5.12 Geometría de un rayo de luz en el espacio libre

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (5.97)$$

Lo anterior por el teorema que relaciona los ángulos alternos internos, los cuales son congruentes entre si.

$$\tan(\theta_1) = \frac{x}{d} \quad (5.98)$$

De donde:

$$x = h_2 - h_1 \quad (5.99)$$

∴ de 5.98 y 5.99

$$d \tan(\theta_1) = h_2 - h_1 \quad (5.100)$$

Teniendo en cuenta la aproximación paraxial y reorganizando la expresión se tiene:

$$h_2 = d\theta_1 + h_1 \quad (5.101)$$

O en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.102)$$

Lo anterior se denomina propagación en un medio de índice de refracción constante y se emplea en situaciones donde la luz se propaga por el espacio libre.

El siguiente caso de estudio es el que ocurre cuando se tiene refracción en una interfase plana con un índice de refracción diferente, esto es, cuando ocurre un cambio de medio (como se muestra en la figura 5.13). Procediendo de una manera similar, pero esta vez partiendo de la ley de Snell y tomando en consideración la aproximación paraxial nuevamente.

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (5.103)$$

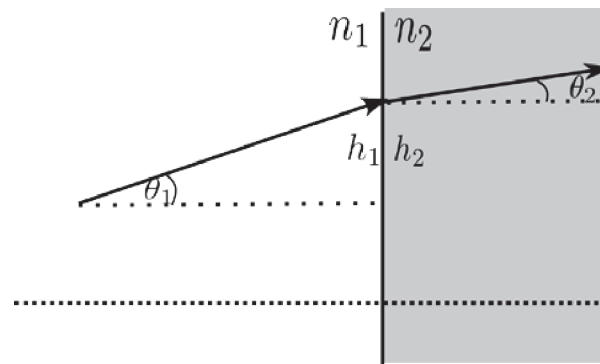


Figura 5.13 Superficie plana con diferente índice de refracción que el medio circundante

Por lo anterior:

$$\theta_2 = \theta_1 \left(\frac{n_1}{n_2} \right) \quad (5.104)$$

Así mismo, justo en la frontera entre los dos medios se cumple que:

$$h_2 = h_1 \quad (5.105)$$

Por consiguiente:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.106)$$

Este mismo proceso se puede aplicar para obtener el resto de relaciones matriciales como las que se muestran a continuación:

Refracción en una interfase curva

$$\mathbf{I}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{Rn_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

Reflexión desde un espejo plano

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.108)$$

Reflexión desde un espejo curvo (R radio de curvatura del espejo)

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

Lente delgada (f distancia focal)

$$\mathbf{L}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (5.110)$$

Lente gruesa

$$\mathbf{L}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R_2n_1} & \frac{n_2}{n_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R_1n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (5.111)$$

En este caso, R_2 , R_1 son los radios de curvatura de la lente del lado de la imagen y del objeto, respectivamente con F siendo la distancia focal y t el espesor de la misma, como se muestra en la figura 5.14.

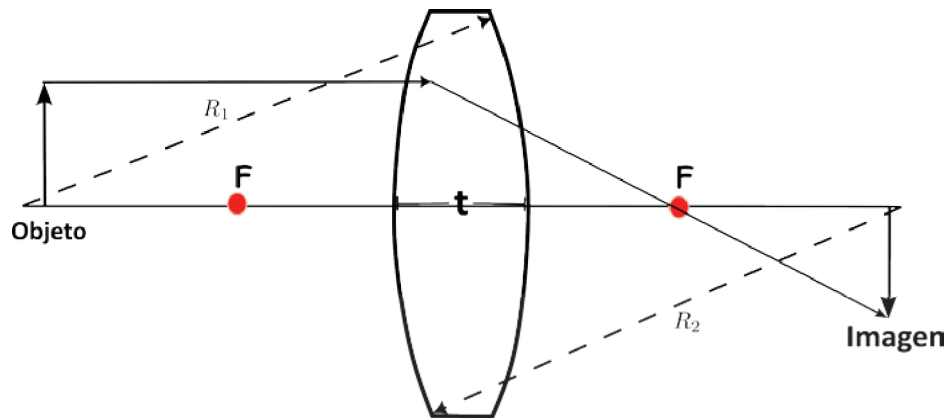


Figura 5.14 Esquema óptico de una lente gruesa

Prisma simple

$$\mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\psi)}{\cos(\phi)} & \frac{d \cos(\phi)}{n \cos(\psi)} \\ 0 & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\psi)} \end{pmatrix} \quad (5.112)$$

Por ejemplo, para el prisma de la figura 5.15 se mostrará el uso del método matricial para determinar el comportamiento de la luz cuando pasa a través de este, pero primero se explicará el significado e interpretación de la matriz ABCD.[34]

Como ya se pudo apreciar en los casos anteriormente estudiados, los sistemas ópticos se pueden describir de forma matricial y dicha matriz tiene la siguiente forma general:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.113)$$

A la matriz ABCD se le denomina matriz de rayos y su importancia radica en la posibilidad de manejar combinaciones de sistemas ópticos mediante la multiplicación de matrices, como se muestra a continuación:

$$[M_{eq}] = [M_n] \dots [M_2][M_1] \quad (5.114)$$

En donde las $[M_i]$ son matrices de elementos ópticos y $[M_{eq}]$ es la matriz equivalente que los combina. Como se notará el orden de la multiplicación esta invertido, es decir, el primer elemento

del producto es el último elemento óptico vista la figura de izquierda a derecha. Lo anterior se comprenderá mejor con el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Se tiene el sistema óptico mostrado en la figura 5.15, la idea es encontrar una matriz equivalente que describa el comportamiento de los rayos de luz cuando estos pasan a través de este, para ello, se escribirán las matrices en forma de producto como ya se menciono en el párrafo anterior, por lo cual:

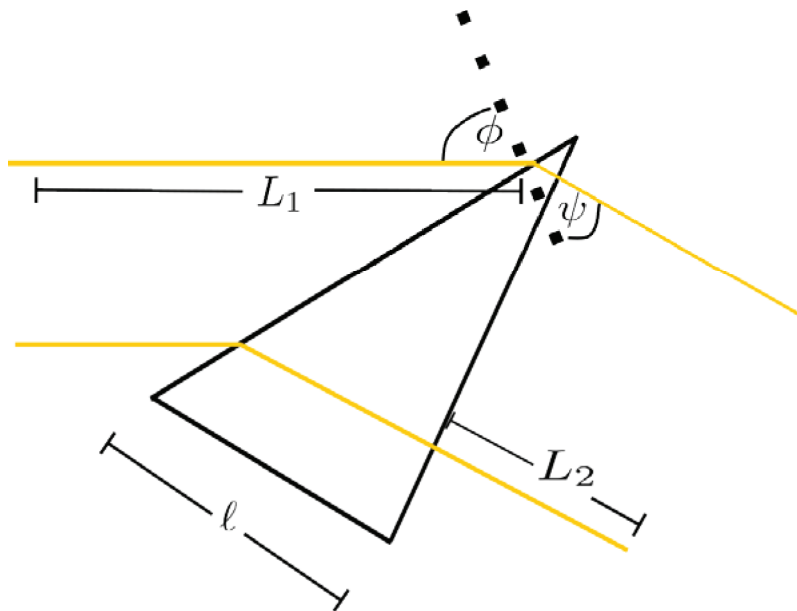


Figura 5.15 Esquema óptico de un prisma simple

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\cos(\psi)}{\cos(\phi)} & \frac{d \cos(\phi)}{n \cos(\psi)} \\ 0 & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\psi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.115)$$

En adelante se tomará la razón de cosenos como $\kappa = \frac{\cos(\psi)}{\cos(\phi)}$ a la cual se le conoce como magnificación adimensional del haz de luz, por lo anterior, multiplicando la matriz de un prisma simple junto con la del espacio libre del lado de L_1 , se tiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa & \kappa L_1 + \frac{\ell}{n\kappa} \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

Multiplicando las matrices restantes.

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \kappa L_1 + \frac{\ell}{n\kappa} + \frac{L_2}{\kappa} \\ 0 & \frac{1}{\kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} \quad (5.117)$$

Como se puede apreciar la matriz columna correspondiente a las coordenadas del haz incidente (h_1, θ_1) no se tienen en cuenta a la hora de obtener la matriz ABCD, ya que la intención es escribir las coordenadas del sistema de imagen (h_2, θ_2) como una combinación lineal de los rayos de luz incidente. Adicionalmente, la componente B de la matriz de rayos, corresponde al camino óptico del sistema, esto es, la distancia recorrida por la luz para el conjunto de elementos ópticos estudiados.

5.3.4 Óptica matricial en Python

El siguiente código permite modelar diversos sistemas ópticos haciendo uso de matrices de rayos. En este caso, se trata de un sistema compuesto por tres lentes: dos plano-cóncavas y una biconvexa. Normalmente, este tipo de montaje es el que se emplea en las lupas de aumento.

```

1
2 # Enables the inline functionality of matplotlib
3 %matplotlib inline
4 isdark = False
5
6 # Imports the necessary libraries from the rayoptics environment
7 from rayoptics.environment import *
8
9 # Creates the optical model and its components
10 opm = OpticalModel()
11 sm = opm['seq_model']
12 osp = opm['optical_spec']
13 pm = opm['parax_model']
14 em = opm['ele_model']
15 pt = opm['part_tree']
16 ar = opm['analysis_results']
17
18 # Specifications of the pupil and the field of view
19 osp['pupil'] = PupilSpec(osp, key=['object', 'epd'], value=12.5)
20 osp['fov'] = FieldSpec(osp, key=['object', 'angle'], value=20.0, \
21 flds=[0., 0.707, 1.],
22 is_relative=True)
23 osp['wvls'] = WvlSpec([( 'F', 0.5), (587.5618, 1.0), ( 'C', 0.5)], \
24 ref_wl=1)
25
26 # Activates the radius mode for the operations of the 'opm' object.
27 # Relevant in optics or calculations involving radial geometry.
28 opm.radius_mode = True
29
30 # Sets the thickness of the first gap to a very large value (1e10).
31 # This could be to simulate an
32 #infinite space or an extremely large spacing between
33 #surfaces.
34 sm.gaps[0].thi = 1e10

```

Código 5.5 Modelado de un triplete óptico (lupa)

```

1
2 # Adds a surface with the following parameters:
3 # - Radius of curvature 23.713
4 # - Thickness of 4.831
5 # - Refractive index 'N-LAK9' from the brand 'Schott'
6 sm.add_surface([23.713, 4.831, 'N-LAK9', 'Schott'])
7
8 # Adds a surface with the following parameters:
9 # - Radius of curvature 7331.288
10 # - Thickness of 5.86
11 # No refractive index or brand specified
12 sm.add_surface([7331.288, 5.86])
13
14 # Adds a surface with the following parameters:
15 # Radius -24.456
16 #(negative radius indicates a concave surface)
17 # - Thickness of 0.975
18 # - Refractive index 'N-SF5' from the brand 'Schott'
19 sm.add_surface([-24.456, 0.975, 'N-SF5', 'Schott'])
20
21 # Sets the end of the system of surfaces.
22 #This could indicate that up to this point, all surfaces are
23 sm.set_stop()
24
25 # Adds a surface with the following parameters:
26 # - Radius of curvature 21.896
27 # - Thickness of 4.822
28 # No refractive index or brand specified
29 sm.add_surface([21.896, 4.822])
30
31 # Adds a surface with the following parameters:
32 # - Radius of curvature 86.759
33 # - Thickness of 3.127
34 # - Refractive index 'N-LAK9' from the brand 'Schott'
35 sm.add_surface([86.759, 3.127, 'N-LAK9', 'Schott'])
36
37 # Adds a surface with the following parameters:
38 # - Radius of curvature -20.4942
39 #(negative radius indicates a concave surface)
40 # - Thickness of 41.2365
41 # No refractive index or brand specified
42 sm.add_surface([-20.4942, 41.2365])
43
44 # Updates the optical model
45 opm.update_model()
46
47 # Lists the model of the surface system
48 sm.list_model()
49
50 # Creates the interactive layout plot of the optical system
51 layout=plt.figure(FigureClass=InteractiveLayout,\
52 opt_model=opm, is_dark=isdark).plot()

```

Código 5.6 Modelado de un triplete óptico (lupa) cont

Como resultado de ejecutar este script se obtiene la siguiente figura 5.16, en la cual se puede apreciar el resultado de hacer incidir un haz de luz sobre el triplete óptico³.

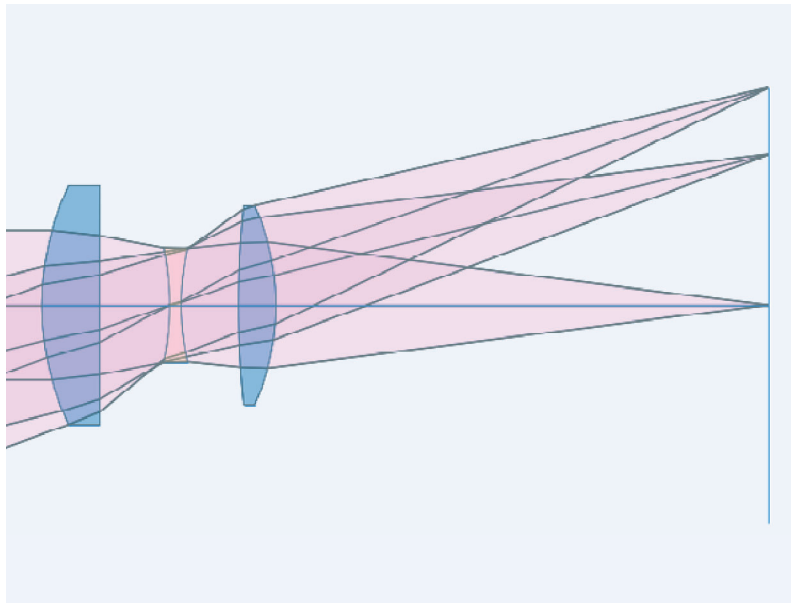


Figura 5.16 Sistema óptico compuesto por tres lentes simples (lupa)

Este sistema, como se puede apreciar, toma el haz de luz incidente proveniente de una fuente lejana y refracta los rayos de tal manera que magnifica la imagen. Al aumentar la distancia entre los diferentes haces de luz, la imagen resultante es una versión ampliada del objeto enfocado.

5.4 Problemas

1. Se tiene un sistema masa resorte, determine la constante del resorte para que el sistema logre una frecuencia de oscilación de:
 - a) $1AB$ kHz donde A y B son los últimos dígitos de su documento de identidad.
 - b) La longitud de onda de ese sistema.
 - c) El periodo de este.
2. Modele de forma paralela dos sistemas oscilatorios: uno masa-resorte y un circuito RLC, de tal manera que ambos sean subamortiguados. ¿Qué conclusión puede obtener al comparar la parte del amortiguamiento y la frecuencia de oscilación del sistema mecánico con el circuito eléctrico? Realice una interpretación del papel que desempeña el inductor y su análogo en el caso mecánico (resorte, amortiguador).
3. Diseñe un circuito RLC de tal forma que presente el mismo comportamiento que un sistema masa-resorte sin amortiguamiento, es decir, cuyas oscilaciones se incrementen con el tiempo. Concluya.
4. Encuentre la matriz equivalente de un sistema compuesto por una lente delgada de distancia focal de 40 mm, una superficie refractiva plana con índice de refracción de 0.95 y otra lente delgada con distancia focal de 15 mm.

³Para ejecutar el código es necesario instalar la librería rayoptics. Se recomienda crear un ambiente con conda y luego instalar la librería.

5. Dos lentes biconvexas se emplean para construir un microscopio simple. Diseñe uno usando lentes de lupa, como se muestra en la figura 5.17, donde las distancias focales son las de las lentes de su elección.

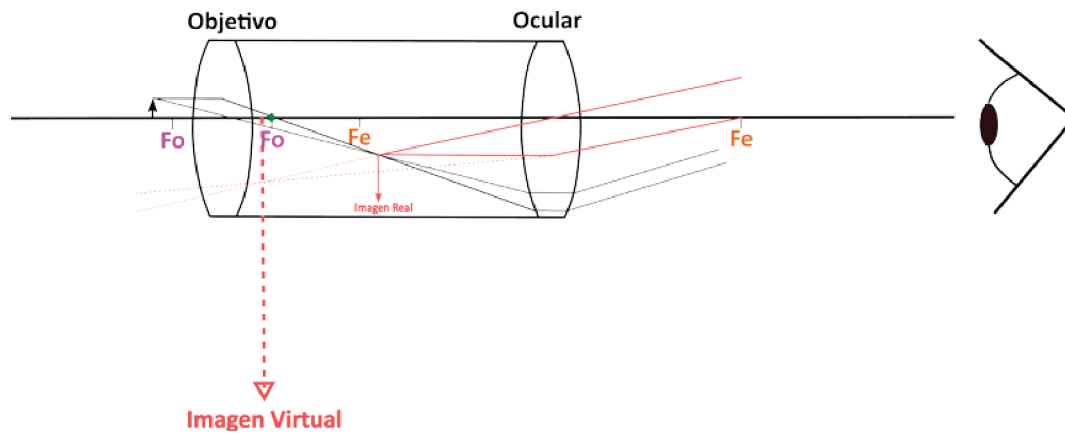
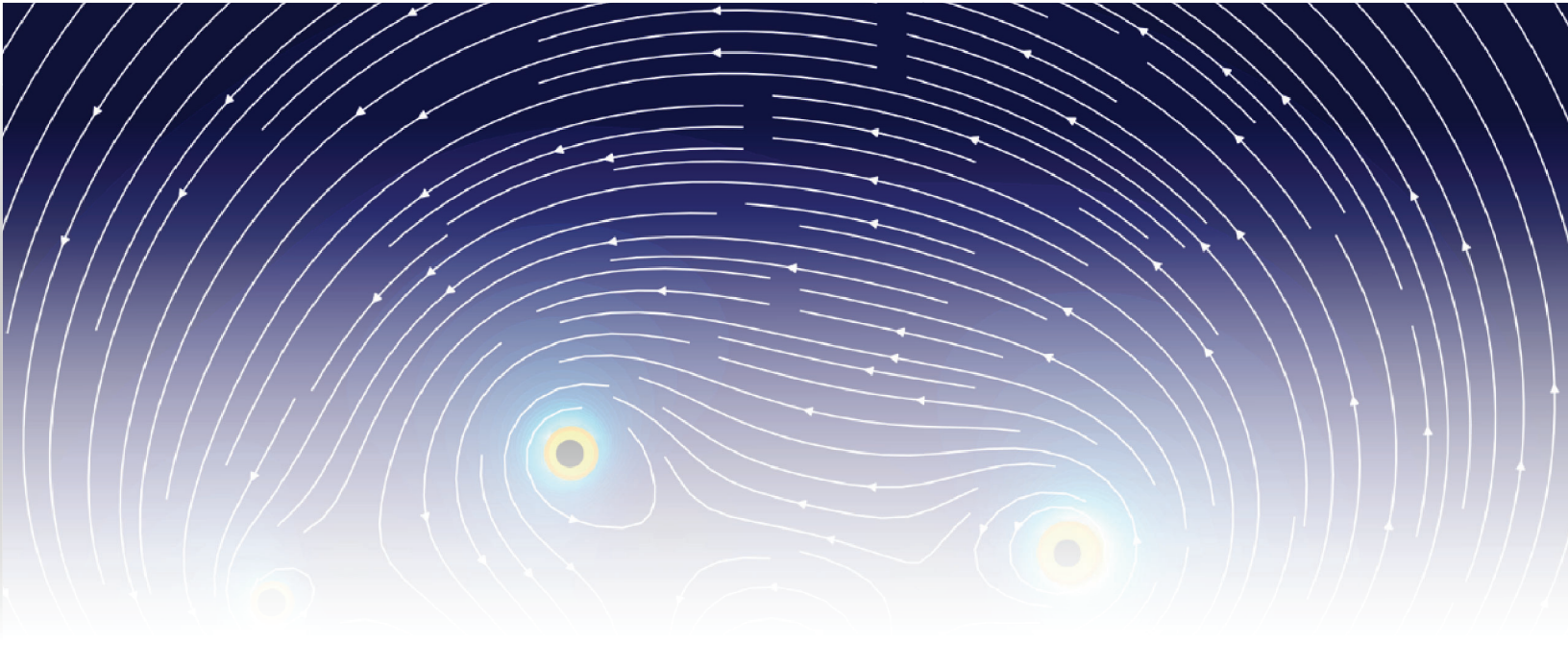


Figura 5.17 Trazado de rayos para formación de imagen en un microscopio

Encuentre la matriz equivalente para el sistema óptico y su magnificación usando óptica matricial.



Referencias

- [1] S. R. Reznick, “Dielectric constants and loss tangents of polymers,” *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, vol. 66C, no. 3, pp. 191–201, 1962.
- [2] D. R. Lide, *CRC handbook of chemistry and physics*. CRC press, 2004, vol. 85.
- [3] B. J. Calder and A. M. Tybout, “What makes a good theory practical?” *AMS review*, vol. 6, no. 3, pp. 116–124, 2016.
- [4] L. Chiaraviglio, A. Elzanaty, and M.-S. Alouini, “Health risks associated with 5g exposure: A view from the communications engineering perspective,” *arXiv preprint arXiv:2006.00944*, 2020.
- [5] L. Corry, “Hermann minkowski and the postulate of relativity,” *Archive for History of Exact Sciences*, pp. 273–314, 1997.
- [6] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*. OUP Oxford, 2014.
- [7] P. W. Higgs, “Broken symmetries and the masses of gauge bosons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 16, p. 508, 1964.
- [8] F. Englert and R. Brout, “Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons,” *Physical Review Letters*, vol. 13, no. 9, p. 321, 1964.
- [9] J. L. de Lagrange, “Sur l’attraction des sphéroïdes elliptiques,” *Nouv. Mém. Acad. Royale Berlin* année, pp. 619–649, 1773.
- [10] C. F. Gauss and C. F. Gauss, *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum: methodo nova tractata*. Springer, 1877.
- [11] J. C. Maxwell, “Viii. a dynamical theory of the electromagnetic field,” *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, no. 155, pp. 459–512, 1865.

- [12] C. A. de Coulomb, “Premier mémoire sur lelectricité et le magnétisme,” *Histoire de l’Académie Royale des Sciences*, vol. 569, p. 54, 1785.
- [13] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, “Codata recommended values of the fundamental physical constants: 2018,” *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 50, no. 3, p. 033105, 2021.
- [14] E. M. Purcell and D. J. Morin, *Electricity and magnetism*. Cambridge University Press, 2013.
- [15] N. S. Matthew, *Elements of electromagnetics*. Oxford University Press, 2015.
- [16] R. D. Purrington, *Physics in the nineteenth century*. Rutgers University Press, 1997.
- [17] H. Goldstein, C. Poole Jr, and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd ed. Pearson, 2001.
- [18] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2017.
- [19] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1964, vol. 2. [Online]. Available: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_02.html
- [20] G. S. Ohm, *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*. Berlin: J. F. Rowny, 1827.
- [21] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, 1st ed. Belmont, CA: Cengage Learning, 1976.
- [22] C. S. M. Pouillet, *Éléments de physique expérimentale et de météorologie*. Louis Hauman et Compe., 1836, vol. 1.
- [23] *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Handbook of Chemistry and Physics, 103rd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2022.
- [24] P. G. de Gennes, “Superconductivity of metals and alloys,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 36, no. 2, pp. 225–237, 1964.
- [25] K. Gavroglu, “Freezing physics: Heike kamerlingh onnes and the quest for cold.(history of science and scholarship in the netherlands, 10.),” 2010.
- [26] S. O. Kasap, *Principles of Electronic Materials and Devices*, 3rd ed. McGraw-Hill, 2006.
- [27] The Engineering ToolBox, “Resistivity and conductivity - temperature coefficients common materials,” [online], 2003, [Accessed 7-11-2023]. [Online]. Available: https://www.engineeringtoolbox.com/resistivity-conductivity-d_418.html
- [28] B. Dibner, *A History of the Electrical Engineering Profession*. New York, NY: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1985.
- [29] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1997.

- [30] N. Zettili, Quantum Mechanics: Concepts and Applications. John Wiley & Sons, 2009.
- [31] P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists, 2nd ed. Springer, 2013, vol. 67.
- [32] R. F. Steidel, An introduction to mechanical vibrations: Solutions manual, 3rd ed. New York, USA: J. Wiley, 1989.
- [33] G. R. Fowles, Introduction to modern optics, 2nd ed. New York, USA: Courier Corporation, 1989.
- [34] F. J. Duarte, Tunable laser optics, 2nd ed. Boca Raton, Fl, USA: CRC Press, 2017.



**Electricidad,
magnetismo y ondas**
con aplicaciones en Python

Este libro se terminó de editar en septiembre de 2025

La física es una ciencia que permite comprender y describir el universo mediante leyes y principios fundamentales. Entre sus ramas más esenciales se encuentra el electromagnetismo, el cual ha sido clave para explicar fenómenos que van desde el funcionamiento de un circuito eléctrico hasta la compleja interacción entre la luz y la materia. Todo ello se enmarca en cinco relaciones fundamentales: las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz, que en conjunto han sido cruciales tanto para el desarrollo de la tecnología moderna como para nuestra comprensión del mundo natural.

Este libro está diseñado como guía de estos conceptos clave de la física, comenzando con las herramientas matemáticas necesarias para su comprensión: los vectores, el cambio de sistemas de coordenadas y su aplicación para la solución de problemas relacionados con la primera ley de Gauss, esto es, el comportamiento del campo eléctrico a partir de distribuciones de carga.

